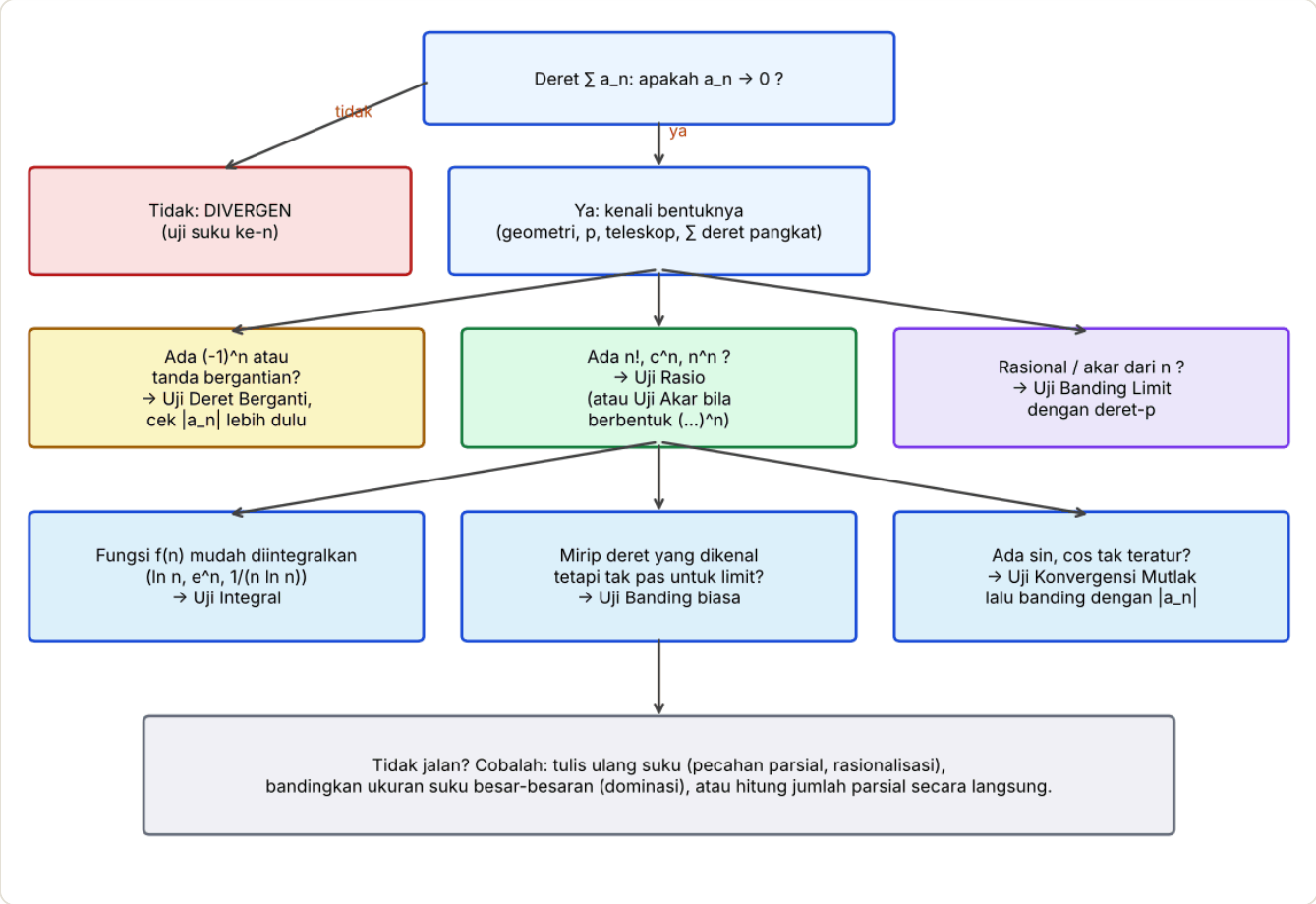
Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.7 Strategi Menguji Deret

Kita sudah punya banyak uji kekonvergenan: uji divergensi, integral, perbandingan, perbandingan limit, Leibniz, rasio, akar, ditambah deret geometri, deret-p, dan deret teleskop. Kesulitan baru muncul: *uji mana yang dipakai untuk deret tertentu?* Tidak ada resep mekanis yang selalu benar, tetapi ada urutan pertimbangan yang hampir selalu menolong. Subbab ini merangkumnya dan melatihnya pada banyak contoh.

1. Langkah-langkah strategi



Alur keputusan: mulai dari uji divergensi, lalu kenali bentuk suku.

1. **Cek dulu apakah $a_n \to 0$.** Bila tidak (atau limit tidak ada), deret divergen menurut uji divergensi. Langkah ini cepat dan sering menyelesaikan soal.
2. **Kenali deret standar.**
   - Geometri $\sum ar^{n-1}$: konvergen bila $|r| < 1$, jumlah $\frac{a}{1-r}$.
   - Deret-p $\sum \frac{1}{n^p}$: konvergen bila $p > 1$.
   - Teleskop: uraikan dengan pecahan parsial, lihat suku yang bertahan.

3. **Suku rasional atau memuat akar dari polinomial** $\Rightarrow$ uji perbandingan limit dengan $\frac{1}{n^p}$ dari suku dominan; bila ada pertidaksamaan jelas, perbandingan langsung.
4. **Berganti tanda** ($(-1)^n$) $\Rightarrow$ uji Leibniz; bila gagal, periksa uji rasio atau uji divergensi. Lalu periksa kemutlakan: apakah $\sum |a_n|$ konvergen?
5. **Faktorial, pangkat c^n, atau hasil kali/pembagian dalam n** $\Rightarrow$ uji rasio. Bila seluruh suku berpangkat n: uji akar.
6. **Suku $a_n = f(n)$ dengan f mudah diintegralkan dan menurun** $\Rightarrow$ uji integral (misalnya $\frac{1}{n(\ln n)^p}$, ne^{-n^2}).
7. **Bila semua gagal**: tulis ulang suku (rasionalkan akar, pecahan parsial, identitas trigonometri), atau cari batas dengan $|\sin| \le 1$, $\ln n < n^{\varepsilon}$.

DUA JEBAKAN YANG PALING SERING

- Uji rasio dan akar *gagal* ($L = 1$) untuk suku rasional murni. Jangan buang waktu; pakai perbandingan.
- Uji divergensi tidak pernah membuktikan kekonvergenan. $a_n \to 0$ hanyalah syarat perlu.

2. Contoh-contoh

Untuk tiap deret, tentukan konvergen/divergen, dan jelaskan ujinya.

CONTOH 1 — $\sum \dfrac{N-1}{3N+1}$

$\lim \dfrac{n-1}{3n+1} = \dfrac{1}{3} \neq 0$. Divergen (uji divergensi).

CONTOH 2 — $\sum \dfrac{\sqrt{N^3+1}}{3N^3+4N^2+2}$

Suku dominan: $\dfrac{n^{3/2}}{3n^3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{n^{3/2}}$. Bandingkan limit dengan $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$: $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{1}{3}$. Deret-$p$ dengan $p = \frac{3}{2} > 1$ konvergen, jadi konvergen. (Jumlahnya $\approx 0{,}591$.)

CONTOH 3 — $\sum NE^{-N^2}$

Fungsi xe^{-x^2} mudah diintegralkan: $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2e}$. Menurun untuk $x \ge 1$. Konvergen (uji integral). Uji rasio juga bisa: $\dfrac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}} = \frac{n+1}{n}e^{-2n-1} \to 0$.

CONTOH 4 — $\sum (-1)^N \dfrac{3^N}{N^2 2^N}$

Berganti tanda, tetapi $\dfrac{(3/2)^n}{n^2} \to \infty$ (eksponensial mengalahkan polinomial). Suku tidak menuju 0, jadi divergen. (Uji rasio juga memberi $L = \frac{3}{2} > 1$.)

CONTOH 5 — $\sum \dfrac{N!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3N+2)}$

Faktorial dan hasil kali: uji rasio. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)}{3(n+1)+2} = \dfrac{n+1}{3n+5} \to \dfrac{1}{3} < 1$. Konvergen.

CONTOH 6 — $\sum_{N=2}^{\infty} \dfrac{1}{N(\mathrm{LN}\, N)^2}$

Uji integral: dengan $u = \ln x$, $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \Big[-\frac{1}{\ln x}\Big]_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$. Konvergen. Bandingkan dengan $\sum \frac{1}{n \ln n}$ yang divergen: pangkat tambahan pada $\ln n$ mengubah hasil.

CONTOH 7 — $\sum \left(\dfrac{\mathrm{LN}\, N}{N}\right)^N$

Seluruh suku berpangkat n: uji akar. $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\ln n}{n} \to 0 < 1$. Konvergen mutlak.

CONTOH 8 — $\sum N \,\mathrm{SIN}\, \dfrac{1}{N}$

$n \sin \frac{1}{n} = \dfrac{\sin(1/n)}{1/n} \to 1 \neq 0$. Divergen (uji divergensi). Sebaliknya $\sum \sin \frac{1}{n}$ divergen karena $\sin(1/n)\big/\frac{1}{n} \to 1$ dan harmonik divergen (perbandingan limit).

CONTOH 9 — $\sum (-1)^N \dfrac{1}{\sqrt{N}+1}$

Berganti tanda dengan $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ menurun dan $\to 0$, jadi konvergen (Leibniz). Kemutlakan: $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ dibandingkan $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (limit 1), divergen. Jadi **konvergen bersyarat**.

CONTOH 10 — $\sum \dfrac{\mathrm{COS}\, N}{N^{3/2}}$

Tanda tak beraturan. $\left|\dfrac{\cos n}{n^{3/2}}\right| \le \dfrac{1}{n^{3/2}}$ dan $p = \frac{3}{2} > 1$. Konvergen mutlak.

CONTOH 11 — $\sum \dfrac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}}$ (RASIONALKAN)

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$: deret teleskop dengan $s_n = \sqrt{n+1}-1 \to \infty$. Divergen. (Alternatif: dominan $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, $p=\frac{1}{2}$.)

CONTOH 12 — $\sum \dfrac{2^N}{N!}$

Rasio $\dfrac{2}{n+1} \to 0$. Konvergen (jumlahnya e^2-1 bila mulai dari $n=1$; lihat 11.10).

CONTOH 13 — $\sum \dfrac{\mathrm{LN}\, N}{N^2}$

$\ln n < \sqrt{n}$ untuk n cukup besar, jadi $\dfrac{\ln n}{n^2} < \dfrac{1}{n^{3/2}}$, konvergen (perbandingan). Atau uji integral seperti pada 11.3.

3. Tabel ringkas

Bentuk deret	Uji pertama
$\sum ar^n$	geometri
$\sum 1/n^p$	deret-p
polinom/polinom	perbandingan limit dengan $1/n^p$
$n!$, c^n, $\binom{2n}{n}$	rasio
$(\ldots)^n$	akar
$(-1)^n b_n$	Leibniz, lalu kemutlakan
$f(n)$, f mudah diintegralkan	integral
$a_n \not\to 0$	divergensi

4. Ringkasan

- Selalu mulai dengan uji divergensi dan pengenalan deret standar.

- Pilih uji berdasarkan bentuk suku: rasional (perbandingan), faktorial/eksponensial (rasio), pangkat-n (akar), berganti tanda (Leibniz), integrabel (integral).
- Bila satu uji tidak menyimpulkan, ganti uji; jangan memaksa.

Mulai 11.8, sukunya mengandung peubah x: deret pangkat.