Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.6 Kekonvergenan Mutlak, Uji Rasio dan Akar

Deret harmonik berganti tanda konvergen, tetapi deret harmonik biasa divergen. Perbedaan ini ternyata penting: ada dua "tingkat" kekonvergenan. Subbab ini merumuskannya dan memberi dua uji yang sangat kuat untuk deret dengan faktorial atau pangkat: **uji rasio** dan **uji akar**.

1. Kekonvergenan mutlak dan bersyarat

DEFINISI

- $\sum a_n$ **konvergen mutlak** (*absolutely convergent*) jika deret nilai mutlaknya $\sum |a_n|$ konvergen.
- $\sum a_n$ **konvergen bersyarat** (*conditionally convergent*) jika $\sum a_n$ konvergen tetapi $\sum |a_n|$ divergen.

Untuk deret dengan suku positif, kedua gagasan itu sama. Contoh:

- $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ konvergen mutlak (karena $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen).
- $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergen bersyarat (konvergen menurut uji Leibniz, tetapi $\sum \frac{1}{n}$ divergen).

TEOREMA

Jika $\sum |a_n|$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen. (Kekonvergenan mutlak $\Rightarrow$ kekonvergenan.)

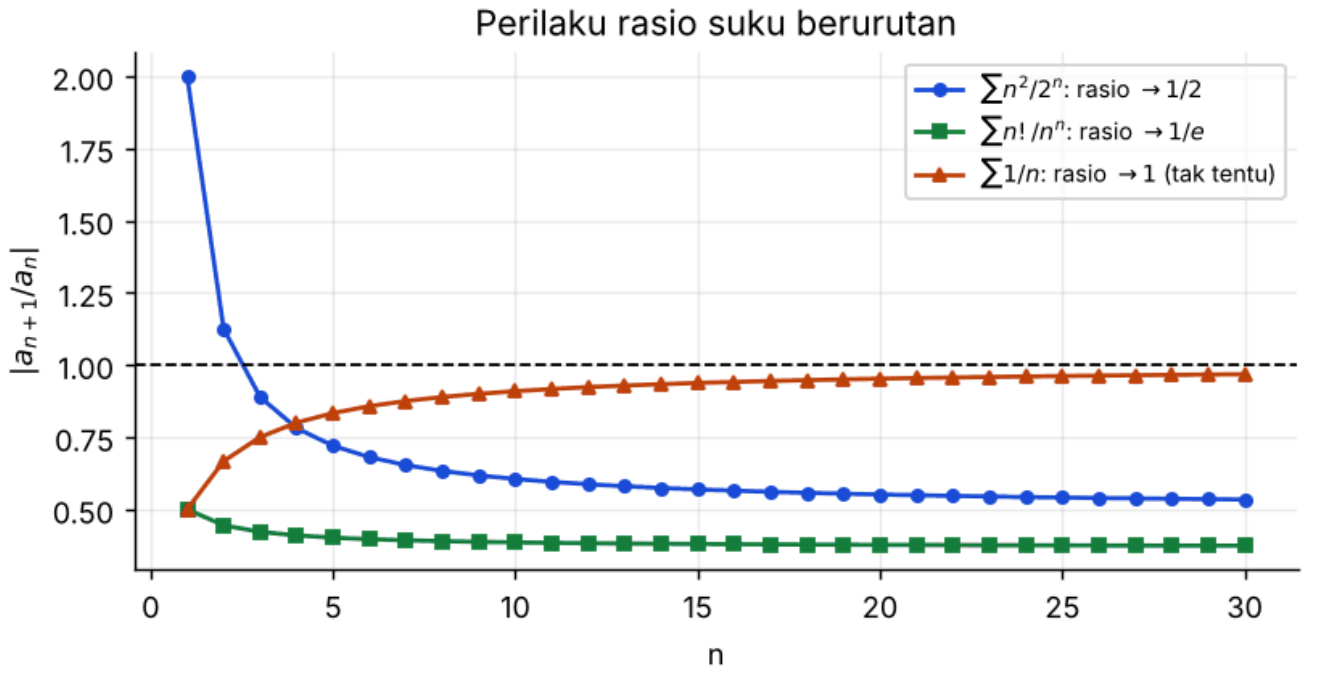
Bukti. Karena $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$, maka $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$. Deret $\sum 2|a_n|$ konvergen, jadi $\sum (a_n + |a_n|)$ konvergen menurut uji perbandingan. Lalu $\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$ adalah selisih dua deret konvergen. ■

CONTOH 1 — $\sum \frac{\cos n}{n^2}$

Suku berganti tanda secara tak beraturan, sehingga uji Leibniz tidak berlaku. Tetapi $|\cos n| \le 1$, jadi $\left|\dfrac{\cos n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, dan $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen. Maka $\sum |\cos n/n^2|$ konvergen (uji perbandingan), dan deret asal konvergen mutlak, jadi konvergen. (Jumlahnya $\approx 0{,}3241$.)

2. Uji rasio

Ide dasarnya dari deret geometri: bila rasio suku berurutan mendekati bilangan $L < 1$, deretnya "hampir geometri" dengan rasio L, jadi konvergen.



Rasio $|a_{n+1}/a_n|$ untuk tiga deret: menuju $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{e}$, dan 1 (tak tentu).

TEOREMA (UJI RASIO)

1. Jika $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, maka $\sum a_n$ konvergen mutlak (jadi konvergen).
2. Jika $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ atau $= \infty$, maka $\sum a_n$ divergen.
3. Jika $L = 1$, uji **tidak menyimpulkan apa-apa**.

Bukti (kasus 1 dan 2)

(1) Pilih r dengan $L < r < 1$. Ada N sehingga $|a_{n+1}| < r|a_n|$ untuk $n \geq N$. Maka $|a_{N+k}| < r^k|a_N|$, dan $\sum_k r^k|a_N|$ geometri konvergen. Uji perbandingan memberi $\sum |a_n|$ konvergen.
(2) Bila $L > 1$, untuk n besar $|a_{n+1}| > |a_n|$, jadi $|a_n|$ membesar dan $a_n \not\to 0$. Deret divergen menurut uji divergensi. ■

Mengapa $L = 1$ tidak menyimpulkan. Untuk $\sum \frac{1}{n}$ (divergen) dan $\sum \frac{1}{n^2}$ (konvergen), rasio $\to 1$ pada keduanya. Jadi uji rasio tidak dapat membedakan; gunakan uji lain.

Contoh uji rasio

CONTOH 2 — $\sum (-1)^N \dfrac{N^3}{3^N}$

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \dfrac{3^n}{n^3} = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3 \to \dfrac{1}{3} < 1$. Konvergen mutlak. (Jumlahnya $\approx 0{,}0234$.)

CONTOH 3 — $\sum \dfrac{N^N}{N!}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e > 1$. Divergen. (Rasio $2{,}59$ di $n = 10$, $2{,}70$ di $n = 100$, menuju e.)

CONTOH 4 — $\sum \dfrac{2^N N!}{N^N}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{2^n n!} = 2 \cdot \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{2}{(1+1/n)^n} \to \dfrac{2}{e} \approx 0{,}736 < 1$. Konvergen.

CONTOH 5 — $\sum \dfrac{(2N)!}{(N!)^2}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \to 4 > 1$. Divergen.

CONTOH 6 — $\sum \dfrac{N^2}{2^N}$ DAN JUMLAHNYA

Rasio $= \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \to \dfrac{1}{2}$, jadi konvergen. Jumlahnya tepat 6 (dapat diturunkan dengan deret pangkat; lihat 11.9).

CONTOH 7 — UJI RASIO GAGAL

$\sum \dfrac{1}{n^2+1}$: rasio $= \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \to 1$. Tak ada kesimpulan; gunakan perbandingan dengan $\sum \frac{1}{n^2}$.

KAPAN MEMAKAI UJI RASIO

Cocok untuk suku yang memuat **faktorial**, **pangkat** c^n, atau hasil kali, karena faktor-faktornya saling membatalkan pada a_{n+1}/a_n. Tidak berguna untuk suku rasional murni ($L = 1$ selalu).

3. Uji akar

TEOREMA (UJI AKAR)

1. Jika $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, maka $\sum a_n$ konvergen mutlak.
2. Jika $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ atau $= \infty$, maka $\sum a_n$ divergen.
3. Jika $L = 1$, uji tidak menyimpulkan.

Bukti (kasus 1). Pilih r dengan $L < r < 1$. Untuk $n \geq N$, $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, yaitu $|a_n| < r^n$. Bandingkan dengan geometri $\sum r^n$. Kasus 2: $|a_n| > 1$ tak terhingga sering, jadi $a_n \not\to 0$. ■

CONTOH 8 — $\sum \left(\frac{N}{2N+1}\right)^N$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2} < 1$. Konvergen mutlak.

CONTOH 9 — $\sum \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N^2}$

$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$. Divergen.

CONTOH 10 — $\sum \left(\frac{2N+3}{3N+2}\right)^N$

$\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{2n+3}{3n+2} \to \dfrac{2}{3} < 1$. Konvergen.

HUBUNGAN RASIO DAN AKAR

Bila $\lim |a_{n+1}/a_n|$ ada, maka $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ ada dan sama. Uji akar sedikit lebih kuat, tetapi uji rasio biasanya lebih mudah dihitung. Untuk suku berbentuk $(\cdots)^n$, uji akar lebih cocok.

4. Penyusunan ulang suku (rearrangement)

Pada jumlah berhingga, urutan penjumlahan tidak berpengaruh. Pada deret tak hingga, bergantung pada jenis kekonvergenan:

- **Konvergen mutlak:** penyusunan ulang suku *tidak* mengubah jumlah (Dirichlet).
- **Konvergen bersyarat:** penyusunan ulang dapat menghasilkan jumlah berbeda, bahkan sembarang bilangan real atau divergen (Teorema Riemann).

CONTOH 11 — MENYUSUN ULANG HARMONIK BERGANTI TANDA

Jumlah aslinya $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$. Susun ulang dengan pola "dua suku positif, satu suku negatif":

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Hitungan numerik dengan dua juta kelompok memberi $\approx 1{,}03972$, yaitu $\frac{3}{2}\ln 2$. Jadi suku-suku yang sama, urutan berbeda, jumlah berbeda: $\frac{3}{2}\ln 2 \neq \ln 2$.

Alasan: $\sum_{\text{positif}} = \infty$ dan $\sum_{\text{negatif}} = -\infty$. Kita dapat "memborong" suku positif sampai melewati target, lalu suku negatif sampai di bawahnya, berulang, sehingga jumlah parsial menuju target mana saja.

5. Peta uji sejauh ini

Ciri deret	Uji
Suku tidak menuju 0	Uji divergensi
Geometri / deret-p	Rumus langsung
Teleskop	Jumlah parsial
$f(n)$ mudah diintegralkan	Uji integral
Rasional, akar, pangkat	Perbandingan / perbandingan limit
Berganti tanda	Leibniz; periksa kemutlakan
Faktorial, c^n, hasil kali	Uji rasio
Berbentuk $(\ldots)^n$	Uji akar

6. Kesalahan umum

- Menyimpulkan konvergen dari $L = 1$ pada uji rasio atau akar.
- Menganggap kekonvergenan bersyarat sama baiknya dengan mutlak: hanya yang mutlak boleh disusun ulang bebas.
- Lupa nilai mutlak pada rasio untuk deret berganti tanda.
- Salah menghitung a_{n+1}: ganti *setiap* n dengan $n + 1$, termasuk faktorial dan pangkat.

7. Ringkasan

- Mutlak $\Rightarrow$ konvergen; sebaliknya tidak berlaku (harmonik berganti tanda).
- Uji rasio: $L = \lim |a_{n+1}/a_n|$; < 1 konvergen mutlak, > 1 divergen, $= 1$ tak tentu.
- Uji akar: $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, aturan sama.
- Penyusunan ulang aman hanya untuk deret konvergen mutlak.

Subbab berikutnya, 11.7, merangkum semua uji menjadi strategi memilih.