Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.5 Deret Berganti Tanda

Sampai di sini semua deret yang diuji memiliki suku positif. Deret yang sukunya bergantian positif dan negatif berperilaku jauh lebih baik: pembatalan antar suku membantu kekonvergenan. Contoh terkenalnya adalah **deret harmonik berganti tanda**

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

yang konvergen walaupun deret harmonik biasa divergen.

1. Deret berganti tanda

DEFINISI

Deret berganti tanda (*alternating series*) adalah deret yang suku-sukunya berganti positif dan negatif, yaitu berbentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n=b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots \qquad \text{atau} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n,\quad b_n>0.$$

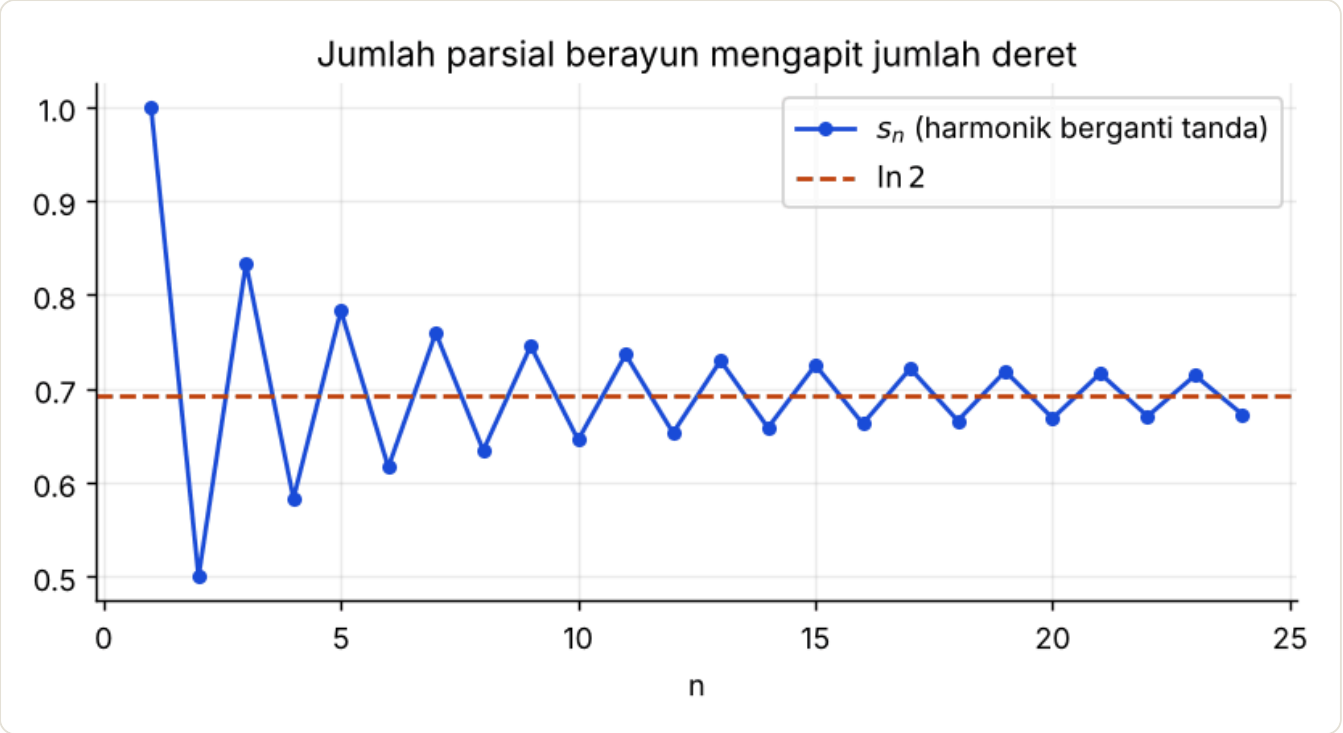
2. Uji deret berganti tanda (Leibniz)

TEOREMA

Jika deret berganti tanda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ ($b_n>0$) memenuhi

1. $b_{n+1}\le b_n$ untuk semua n (barisan b_n menurun), dan
2. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,

maka deret itu konvergen.



Jumlah parsial s_n berayun naik-turun dan mengapit $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

Mengapa ini benar

Perhatikan jumlah parsial:

- Jumlah parsial genap: $s_{2n} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2n-1} - b_{2n})$. Tiap kurung ≥ 0, jadi s_{2n} **naik**. Sekaligus $s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - \cdots - b_{2n} \leq b_1$, jadi s_{2n} **terbatas** oleh b_1. Maka $s_{2n} \to s$ (Teorema Barisan Monoton).
- Jumlah parsial ganjil: $s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1}$, dan $b_{2n+1} \to 0$, maka $s_{2n+1} \to s + 0 = s$.

Kedua subbarisan (genap dan ganjil) menuju s yang sama, sehingga $s_n \to s$. ■

Secara geometris, $s_1 > s_3 > s_5 > \cdots$ turun dari atas, $s_2 < s_4 < \cdots$ naik dari bawah, dan jumlah deret s selalu *terjepit* di antara dua jumlah parsial berurutan.

PERINGATAN

- Kedua syarat harus dipenuhi. Bila $b_n \not\to 0$, deret divergen menurut uji divergensi.
- Syarat menurun cukup berlaku untuk $n \geq N$ (suatu N).
- Uji ini hanya menyatakan **konvergen**; bila syaratnya gagal, uji ini *tidak* menyimpulkan divergen.

3. Contoh

CONTOH 1 — HARMONIK BERGANTI TANDA

$b_n = \frac{1}{n}$: menurun dan $\to 0$. Konvergen. (Nilainya $\ln 2 \approx 0{,}6931$; lihat nanti di 11.10.)

CONTOH 2 — SYARAT $B_N \to 0$ GAGAL

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{3n}{4n-1}$. Di sini $b_n = \dfrac{3n}{4n-1} \to \dfrac{3}{4} \neq 0$. Maka $\lim a_n$ tidak ada (a_n berayun mendekati $\pm\frac{3}{4}$), dan deret divergen menurut uji divergensi.

CONTOH 3 — MEMERIKSA MENURUN DENGAN TURUNAN

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{n^3+1}$. Misalkan $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$. Maka $f'(x) = \dfrac{2x(x^3+1) - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \dfrac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2} < 0$ bila $x^3 > 2$, yaitu $x > 1{,}26$. Jadi b_n menurun untuk $n \geq 2$. Juga $b_n \to 0$ (derajat penyebut lebih besar). Konvergen. (Jumlah $\approx 0{,}2396$.)

CONTOH 4 — MEMERIKSA MENURUN SECARA LANGSUNG

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ (mulai dari $n = 3$). $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ untuk $x > e \approx 2{,}72$; jadi menurun untuk $n \geq 3$. Dan $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$ (l'Hôpital). Konvergen.

CONTOH 5 — SUKU MENGANDUNG FAKTORIAL

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$: $b_n = \dfrac{1}{n!}$ menurun dan $\to 0$. Konvergen. (Jumlahnya $e^{-1} \approx 0{,}3679$; ini adalah e^x di $x = -1$, lihat 11.10.)

CONTOH 6 — MEMERIKSA B_N MENURUN LEWAT SELISIH

$\sum (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}+n}$. $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+n}$, penyebut $\sqrt{n}+n$ bertambah besar bila n naik, sehingga b_n menurun; $b_n \to 0$. Konvergen.

CONTOH 7 — DERET YANG TAMPAK BERGANTI TANDA TETAPI SYARAT MENURUN GAGAL

Misalkan $\sum (-1)^n b_n$ dengan $b_n = \dfrac{1}{n}$ untuk n genap dan $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ untuk n ganjil. Maka $b_n \to 0$, tetapi b_n *tidak menurun*: misalnya $b_3 = \frac{1}{9} < b_4 = \frac{1}{4}$. Jadi uji Leibniz tidak berlaku. Dan deret ini memang **divergen**: bagian positifnya $\sum \frac{1}{2k}$ divergen, sedangkan bagian negatifnya $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ konvergen, sehingga jumlah parsialnya tak terbatas. Moral: syarat menurun bukan formalitas.

4. Taksiran jumlah deret berganti tanda

Karena jumlah s terjepit di antara s_n dan s_{n+1}, jarak $|s - s_n|$ paling besar sama dengan jarak antara keduanya, yaitu b_{n+1}.

TEOREMA (TAKSIRAN DERET BERGANTI TANDA)

Bila $s = \sum (-1)^{n-1} b_n$ memenuhi $b_{n+1} \le b_n$ dan $b_n \to 0$, maka

$$|R_n| = |s - s_n| \le b_{n+1}.$$

Yakni galat jumlah parsial tidak melebihi **suku pertama yang dibuang**.

CONTOH 8 — JUMLAH $\sum \frac{(-1)^N}{N!}$ DENGAN GALAT $< 0{,}01$

Cari n sehingga $b_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} < 0{,}01 \iff (n+1)! > 100$. Karena $4! = 24$ dan $5! = 120$, cukup $n+1 = 5$, yaitu $n = 4$. Maka

$$s_4 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} = 0{,}375.$$

Galat $\le \frac{1}{120} \approx 0{,}0083 < 0{,}01$. Memang nilai sebenarnya $0{,}3679$ berjarak $0{,}0071$ dari $0{,}375$. ✓

CONTOH 9 — $\sum \frac{(-1)^{N+1}}{N^2}$ HINGGA TIGA DESIMAL

Perlu $b_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2} < 0{,}001 \iff (n+1)^2 > 1000 \iff n+1 \ge 32$, jadi $n = 31$. $s_{31} \approx 0{,}82297$; nilai sebenarnya $\pi^2/12 \approx 0{,}82247$, selisih $5 \times 10^{-4} < \frac{1}{32^2} \approx 9{,}8 \times 10^{-4}$ ✓.

CONTOH 10 — HARMONIK BERGANTI TANDA KONVERGEN LAMBAT

Bahkan 1000 suku hanya memberi $s_{1000} \approx 0{,}69265$ vs $\ln 2 = 0{,}69315$; galat $\approx 5 \times 10^{-4} \approx b_{1001} \approx 10^{-3}$. Deret berganti tanda dengan $b_n \sim 1/n$ memerlukan banyak suku.

TRIK

Tebakan lebih baik: nilai tengah $\frac{s_n + s_{n+1}}{2}$ biasanya jauh lebih dekat ke jumlah sebenarnya daripada s_n.

5. Kesalahan umum

- Menganggap deret berganti tanda otomatis konvergen. Contoh 2 menunjukkan sebaliknya.
- Lupa memeriksa bahwa b_n benar-benar *menurun* (bukan hanya menuju 0).
- Memakai taksiran b_{n+1} untuk deret yang bukan berganti tanda.
- Menyimpulkan divergen dari kegagalan syarat menurun (uji ini hanya cukup, bukan perlu).

6. Ringkasan

- Leibniz: b_n menurun dan $\to 0 \Rightarrow \sum (-1)^{n-1} b_n$ konvergen.
- Galat $\le$ suku pertama yang dibuang b_{n+1}.
- Harmonik berganti tanda konvergen (ke $\ln 2$), sedangkan harmonik biasa divergen; ini mengantar pada konsep kekonvergenan bersyarat di 11.6.