Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

# 11.4 Uji Perbandingan

Uji integral hanya cocok bila suku deret mudah diintegralkan. Deret seperti $\sum \frac{1}{2^n+1}$ atau $\sum \frac{n+1}{n^3-2}$ lebih mudah ditangani bila kita *membandingkannya* dengan deret yang kekonvergenannya sudah kita kenal. Pembanding utama kita: **deret geometri** ($\sum r^n$) dan **deret-$p$** ($\sum 1/n^p$).

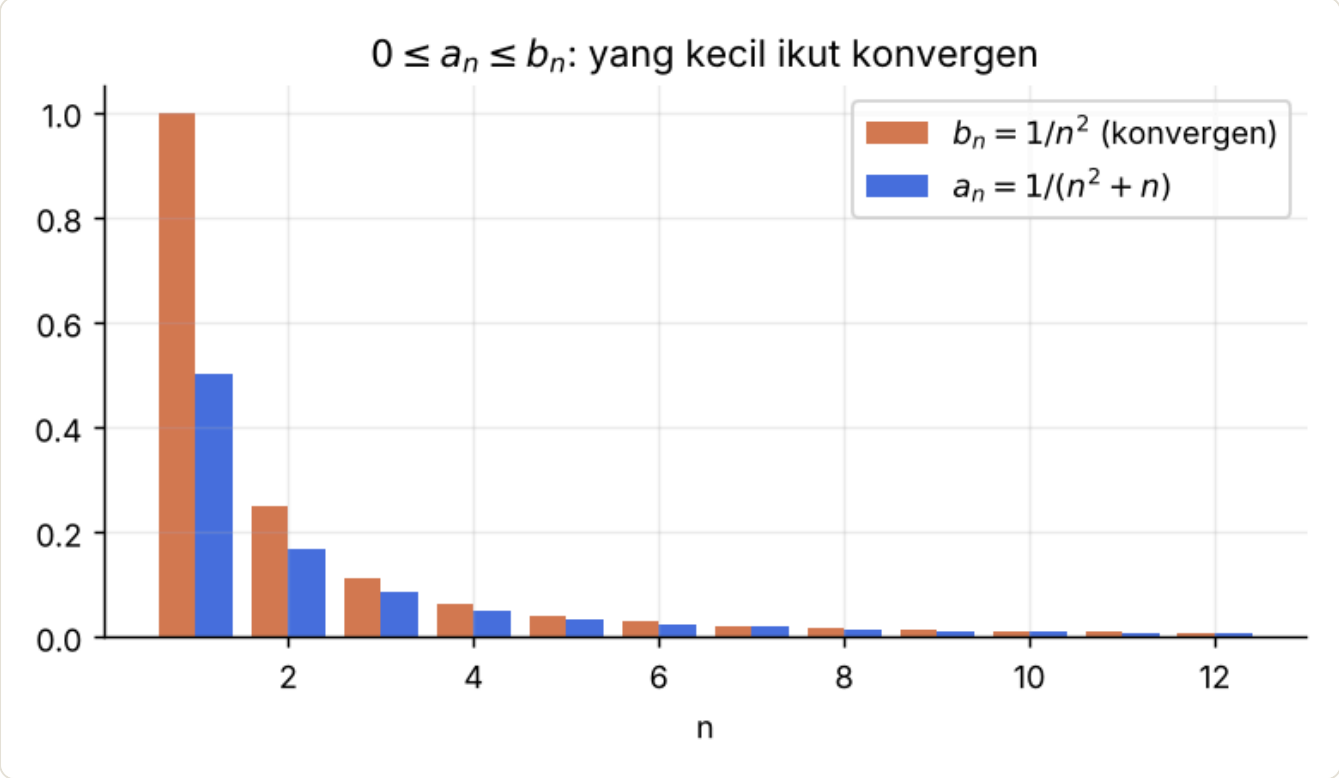
## 1. Uji perbandingan langsung

**TEOREMA (UJI PERBANDINGAN)**

Misalkan $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ deret dengan suku positif.

1. Jika $\sum b_n$ konvergen dan $a_n \le b_n$ untuk semua $n$, maka $\sum a_n$ konvergen.
2. Jika $\sum b_n$ divergen dan $a_n \ge b_n$ untuk semua $n$, maka $\sum a_n$ divergen.

**Intuisi.** Deret yang "lebih kecil" dari deret berjumlah hingga pasti berjumlah hingga; deret yang "lebih besar" dari deret yang meledak pasti meledak.




Batang biru ($a_n$) selalu di bawah batang oranye ($b_n$) dan $\sum b_n$ konvergen, jadi $\sum a_n$ konvergen.

## Bukti (bagian 1)

Misalkan $s_n = \sum_{k \le n} a_k$, $t_n = \sum_{k \le n} b_k$ dan $t = \sum b_k$. Karena suku positif, $s_n$ naik, dan $s_n \le t_n \le t$. Jadi $\{s_n\}$ naik dan terbatas di atas, sehingga konvergen (Teorema Barisan Monoton). Bagian 2 adalah kontrapositifnya: bila $\sum a_n$ konvergen, maka $\sum b_n \le \sum a_n$ juga konvergen, kontradiksi dengan divergensi $\sum b_n$. ■

> **CATATAN**
>
> Pertidaksamaan cukup berlaku untuk $n \ge N$ (suatu $N$), karena berhingga banyak suku awal tidak memengaruhi kekonvergenan. Arah pertidaksamaan harus **cocok** dengan sifat pembanding: "lebih kecil dari yang konvergen" atau "lebih besar dari yang divergen". Dua kombinasi lainnya tidak menghasilkan kesimpulan.

## Contoh

**CONTOH 1 — $\sum \frac{5}{2N^2+4N+3}$**

Untuk $n \ge 1$, $2n^2 + 4n + 3 > 2n^2$, sehingga $\dfrac{5}{2n^2+4n+3} < \dfrac{5}{2n^2} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$. Deret $\frac{5}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ konvergen (deret-$p$, $p = 2$). Jadi deret asal konvergen.

**CONTOH 2 — $\sum \frac{\ln N}{N}$ ($N \ge 3$)**

Untuk $n \ge 3$, $\ln n > 1$, jadi $\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$. Karena harmonik divergen, deret asal divergen.

**CONTOH 3 — $\sum \frac{1}{2^N+1}$**

$\dfrac{1}{2^n+1} < \dfrac{1}{2^n}$ dan $\sum (\frac{1}{2})^n$ geometri konvergen ($r = \frac{1}{2}$). Maka konvergen.

**CONTOH 4 — $\sum \frac{\sin^2 N}{N^2}$**

Suku tak negatif dan $\sin^2 n \le 1$, jadi $\dfrac{\sin^2 n}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$. Konvergen.

**CONTOH 5 — PEMBANDINGAN YANG SALAH ARAH**

Untuk $\sum \dfrac{1}{2^n - 1}$, kita punya $\dfrac{1}{2^n - 1} > \dfrac{1}{2^n}$, tetapi pembanding konvergen: arahnya *tidak cocok* (lebih besar dari yang konvergen tidak menyimpulkan apa-apa). Perlu uji lain, yaitu uji perbandingan limit di bawah.

## 2. Uji perbandingan limit

Pada Contoh 5, deret $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ jelas "berperilaku seperti" $\sum \frac{1}{2^n}$ untuk $n$ besar. Uji berikut menjadikan intuisi itu tepat tanpa perlu mencari pertidaksamaan.

**TEOREMA (UJI PERBANDINGAN LIMIT)**

Misalkan $a_n, b_n > 0$ dan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \qquad 0 < c < \infty.$$

Maka $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ sama-sama konvergen atau sama-sama divergen.

### Bukti

Pilih bilangan $m, M$ dengan $0 < m < c < M$. Karena $a_n / b_n \to c$, ada $N$ sehingga $m < \frac{a_n}{b_n} < M$ untuk $n > N$, yaitu $m b_n < a_n < M b_n$. Bila $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum M b_n$ konvergen, dan $a_n < M b_n$ memberi $\sum a_n$ konvergen (uji perbandingan). Bila $\sum b_n$ divergen, $\sum m b_n$ divergen dan $a_n > m b_n$ memberi $\sum a_n$ divergen. ■

**CARA MEMILIH $B_N$**

Ambil *suku dominan* pada pembilang dan penyebut (pangkat tertinggi), dan buang konstanta. Untuk $a_n = \dfrac{3n^2 + n}{5n^4 - 2}$, pilih $b_n = \dfrac{n^2}{n^4} = \dfrac{1}{n^2}$.

**CONTOH 6 — $\sum \frac{1}{2^N - 1}$**

Ambil $b_n = \frac{1}{2^n}$. $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2^n}{2^n - 1} = \dfrac{1}{1 - 2^{-n}} \to 1$. Limit positif dan berhingga; $\sum b_n$ konvergen, jadi $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ konvergen. (Nilainya $\approx 1{,}6067$.)

**CONTOH 7 — $\sum \frac{2N^2+3N}{\sqrt{5+N^5}}$**

Suku dominan: $\dfrac{2n^2}{n^{5/2}} = 2n^{-1/2}$. Ambil $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Maka $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(2n^2+3n)\sqrt{n}}{\sqrt{5+n^5}} = \dfrac{2n^{5/2}+3n^{3/2}}{n^{5/2}\sqrt{1+5/n^5}} \to 2$. Deret-$p$ dengan $p = \frac{1}{2} < 1$ divergen, maka deret asal divergen.

**CONTOH 8 — $\sum \frac{1}{N^{1+1/N}}$**

Ambil $b_n = \frac{1}{n}$. $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{n^{1/n}}$, dan $n^{1/n} = e^{(\ln n)/n} \to e^0 = 1$. Limit $= 1$; harmonik divergen, jadi deret divergen. Perhatikan: pangkat $1 + \frac{1}{n}$ selalu $> 1$, tetapi menuju 1 sehingga deret-$p$ tidak berlaku ($p$ harus konstan).

**CONTOH 9 — $\sum \frac{N+5}{N^3-2N+1}$ UNTUK $N \geq 2$**

Dominan: $\dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$. Rasio dengan $\frac{1}{n^2}$ menuju 1; $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen. Maka konvergen.

**KASUS $C = 0$ ATAU $C = \infty$**

- Jika $c = 0$ dan $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen ($a_n$ lebih kecil kecuali untuk faktor konstan).
- Jika $c = \infty$ dan $\sum b_n$ divergen, maka $\sum a_n$ divergen.

Sisanya ($c = 0$ dengan $\sum b_n$ divergen, atau $c = \infty$ dengan $\sum b_n$ konvergen) tidak memberi kesimpulan. Contoh: $\sum \frac{\ln n}{n^3}$ dibanding $\frac{1}{n^2}$: $c = 0$, $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka konvergen.

## 3. Menaksir jumlah dengan perbandingan

Bila $a_n \leq b_n$ dan kita dapat menjumlahkan $\sum b_n$ secara eksak, maka galat pemotongan $\sum a_n$ dapat dibatasi oleh sisa deret pembanding: $R_n = \sum_{k>n} a_k \leq \sum_{k>n} b_k$.

**CONTOH 10 — $\sum \frac{1}{3^N+1}$ DENGAN $N = 10$**

$\frac{1}{3^k+1} < \frac{1}{3^k}$. Sisa pembanding geometri: $\sum_{k=11}^{\infty} 3^{-k} = \frac{3^{-11}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3^{-10}}{2} \approx 8{,}47 \times 10^{-6}$. Jumlah parsial $s_{10} \approx 0{,}404055$, maka jumlah sebenarnya ada di $[0{,}404055;\ 0{,}404063]$. (Nilai sebenarnya $\approx 0{,}4040633$.) Dalam hampir semua penggunaan praktis, empat desimal $0{,}4041$ sudah pasti benar.

## 4. Strategi memilih pembanding

| Bentuk suku | Pembanding yang cocok |
|---|---|
| Rasional dalam $n$ (polinomial/polinomial) | $\frac{1}{n^p}$, $p$ = selisih derajat |
| Memuat $2^n, 3^n, \ldots$ di penyebut | geometri $r^n$ |
| Akar: $\sqrt{n^k}$ | $n^{k/2}$ pada suku dominan |
| Memuat $\sin n$, $\cos n$, $(-1)^n$ | batas $\lvert\cdot\rvert \le 1$, banding langsung |
| Memuat $\ln n$ | $\ln n < n^{\varepsilon}$ untuk $n$ besar; bandingkan dengan deret-$p$ |

## 5. Kesalahan umum

- Arah yang tidak cocok (Contoh 5). Selalu cek: kecil terhadap konvergen, besar terhadap divergen.
- Uji perbandingan limit memerlukan suku **positif** dan limit $c$ **positif berhingga**.
- Lupa bahwa $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergen hanya bila $p > 1$: $p = 1$ divergen.

## 6. Ringkasan

- Perbandingan langsung: kecil $\le$ konvergen $\Rightarrow$ konvergen; besar $\ge$ divergen $\Rightarrow$ divergen.
- Perbandingan limit: $a_n/b_n \to c \in (0, \infty) \Rightarrow$ sifat kekonvergenan sama.
- Pembanding standar: geometri dan deret-$p$.
- Taksiran galat dapat memakai sisa deret pembanding.

Berikutnya 11.5 Deret Berganti Tanda, yaitu deret yang sukunya tidak semua positif.