Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.3 Uji Integral dan Taksiran Jumlah

Pada 11.2 kita hanya bisa memutuskan kekonvergenan deret bila jumlah parsial s_n punya rumus tertutup (deret geometri, teleskop). Sebagian besar deret tidak sebaik itu. Misalnya, tidak ada rumus sederhana untuk $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, padahal kita ingin tahu apakah deretnya konvergen. Subbab ini memakai **integral** sebagai alat bantu: bila suku deret berasal dari fungsi positif yang menurun, luas di bawah kurva "terjepit" oleh jumlah deret.

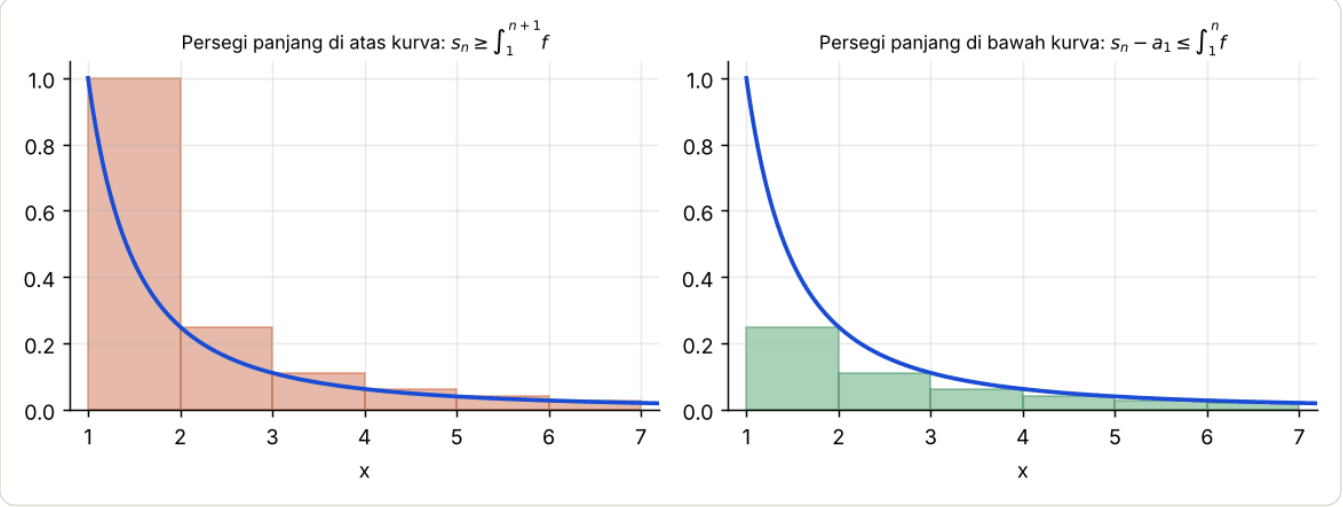
1. Gagasan: membandingkan deret dengan luas

Tinjau deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dan fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$, sehingga $f(n) = \frac{1}{n^2}$. Gambarkan persegi panjang dengan alas 1 dan tinggi $f(n)$, mulai dari $x = n$ ke kanan. Karena f menurun, tiap persegi panjang berada di atas kurva, sehingga jumlah luasnya (yaitu s_n) lebih besar dari luas di bawah kurva:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \;\geq\; \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx.$$

Sebaliknya, bila persegi panjang digeser agar mulai dari $x = k - 1$ (ujung kanannya menyentuh kurva), mereka berada di bawah kurva:

$$s_n - f(1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \;\leq\; \int_{1}^{n} f(x)\,dx.$$



Kiri: persegi panjang di atas kurva, $s_n \geq \int_1^{n+1} f$. Kanan: persegi panjang di bawah kurva, $s_n - a_1 \leq \int_1^n f$.

Jadi jika integral $\int_1^\infty f$ berhingga, jumlah parsial terbatas di atas dan deret konvergen; bila integralnya tak hingga, $s_n \to \infty$ dan deret divergen. Itu isi uji berikut.

2. Uji integral

TEOREMA (UJI INTEGRAL)

Misalkan f kontinu, positif, dan menurun pada $[1, \infty)$, dan $a_n = f(n)$. Maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergen} \iff \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergen.}$$

Dengan kata lain, deret dan integral tak wajar itu *sama-sama konvergen atau sama-sama divergen*.

Bukti

(Integral konvergen $\Rightarrow$ deret konvergen). Dari ketaksamaan kedua di atas, $s_n \le a_1 + \int_1^n f \le a_1 + \int_1^\infty f =: M$. Karena $a_n > 0$, barisan $\{s_n\}$ naik dan terbatas di atas oleh M, jadi konvergen menurut Teorema Barisan Monoton (11.1).

(Integral divergen $\Rightarrow$ deret divergen). Dari ketaksamaan pertama, $s_n \ge \int_1^{n+1} f \to \infty$, maka $s_n \to \infty$. $\blacksquare$

CATATAN PENTING

- Fungsi tidak perlu menurun mulai dari $x = 1$; cukup menurun pada $[N, \infty)$ untuk suatu N, sebab membuang berhingga banyak suku tidak mengubah kekonvergenan.
- Uji ini hanya menyatakan **kekonvergenan**, *bukan nilai* jumlah deret. $\int_1^\infty f$ umumnya berbeda dari $\sum a_n$.
- Batas bawah integral boleh disesuaikan dengan indeks awal deret.
- Syarat "positif" dan "menurun" harus diperiksa, misalnya dengan $f'(x) < 0$.

3. Deret-p

TEOREMA

Deret-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ konvergen jika $p>1$ dan divergen jika $p\le 1$.

Bukti. Bila $p\le 0$, suku $\frac{1}{n^p}\not\to 0$, jadi divergen menurut uji divergensi. Bila $p>0$, $f(x)=x^{-p}$ positif, kontinu, dan menurun pada $[1,\infty)$. Untuk $p\neq 1$,

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{1-p}-1}{1-p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & p>1\\ \infty & p<1,\end{cases}$$

dan untuk $p=1$, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim \ln t=\infty$. Uji integral menyelesaikan bukti. $\blacksquare$

Kasus khusus yang perlu dihafal: $p=1$ (harmonik, divergen), $p=2$ ($\sum 1/n^2$, konvergen), $p=\frac{1}{2}$ ($\sum 1/\sqrt{n}$, divergen), $p=1{,}001$ (konvergen, walaupun sangat lambat).

4. Contoh uji integral

CONTOH 1 — $\sum \frac{1}{N^2+1}$

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ positif, kontinu, menurun ($f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}<0$). Maka

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{t\to\infty}\arctan t-\arctan 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Integral konvergen, sehingga deret konvergen. (Nilai integral $\pi/4\approx 0{,}785$ berbeda dari jumlah deret $\approx 1{,}0767$, sesuai catatan di atas.)

CONTOH 2 — $\sum \frac{\ln N}{N^2}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Turunannya $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$, negatif bila $\ln x > \frac{1}{2}$, yaitu $x > \sqrt{e} \approx 1{,}65$. Jadi f menurun untuk $x \geq 2$; gunakan batas bawah 2 (atau 1, hasilnya sama konvergen). Dengan integral parsial ($u = \ln x,\ dv = x^{-2}dx$):

$$\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^t = 1 - \frac{\ln t + 1}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1.$$

Integral konvergen, maka deret konvergen.

CONTOH 3 — $\sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N \ln N}$ (DIVERGEN SANGAT LAMBAT)

$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ positif dan menurun pada $[2, \infty)$. Dengan substitusi $u = \ln x$:

$$\int_2^t \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln t) - \ln(\ln 2) \ \to\ \infty.$$

Deret divergen. Walaupun suku-sukunya menuju nol lebih cepat dari $1/n$, $\ln(\ln n)$ tumbuh sangat lambat: karena $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln n} \approx \ln(\ln N) + 0{,}79$, untuk mencapai jumlah 10 dibutuhkan N sekitar 10^{4300} suku.

CONTOH 4 — $\sum NE^{-N^2}$

$f(x) = xe^{-x^2}$, $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} < 0$ untuk $x \geq 1$. $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^\infty = \dfrac{1}{2e}$, konvergen. Maka deret konvergen. Lebih jauh, $\sum \leq a_1 + \int_1^\infty f = \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} \approx 0{,}552$; nilai sebenarnya $\approx 0{,}4049$.

CONTOH 5 — KAPAN UJI INTEGRAL TIDAK COCOK

Untuk $\displaystyle\sum \frac{\cos^2 n}{1 + n^2}$, fungsi $\frac{\cos^2 x}{1+x^2}$ tidak menurun (ia berosilasi), jadi uji integral tidak berlaku. Deret ini ditangani dengan uji perbandingan: $0 \leq \frac{\cos^2 n}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$, dan deret terakhir konvergen (Contoh 1). Lihat 11.4.

5. Menaksir jumlah deret

Seandainya kita tahu sebuah deret konvergen ke s, berapa jauh jumlah parsial s_n dari s? Galat (sisa) adalah

$$R_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Dengan gambar persegi panjang yang sama, tetapi mulai dari $x = n$ (bukan dari 1), kita peroleh jepitan untuk sisa:

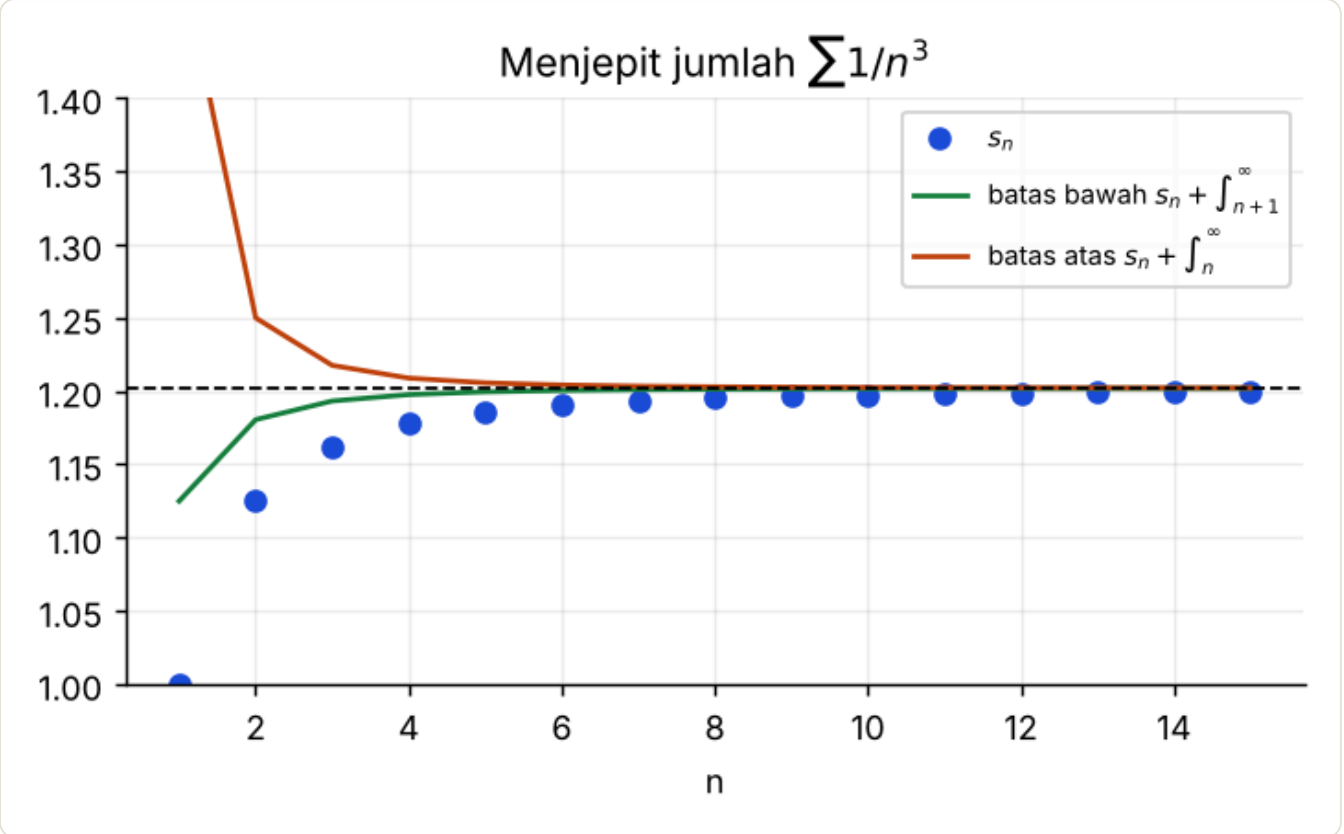
TAKSIRAN SISA (UJI INTEGRAL)

Jika f kontinu, positif, menurun pada $[n, \infty)$, dan $\sum a_k$ konvergen, maka

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\le\; R_n \;\le\; \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Akibatnya, menambahkan batas-batas ini ke s_n menjepit jumlah sebenarnya:

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\le\; s \;\le\; s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$



Batas bawah dan atas yang menjepit jumlah $\sum 1/n^3$ makin rapat ketika n bertambah.

CONTOH 6 — MENAKSIR $\sum \frac{1}{N^3}$ DENGAN $N = 10$

Jumlah parsial: $s_{10} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{1000} \approx 1{,}197532$. Karena $\int_n^\infty x^{-3}dx = \dfrac{1}{2n^2}$:

$$\text{batas atas: } \frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0{,}005, \qquad \text{batas bawah: } \frac{1}{2 \cdot 11^2} \approx 0{,}004132.$$

Jadi $1{,}197532 + 0{,}004132 \le s \le 1{,}197532 + 0{,}005$, yaitu $1{,}201664 \le s \le 1{,}202532$. Kita bisa memakai titik tengah $s \approx 1{,}2021$ dengan galat maksimum $< 0{,}0005$. (Nilai sebenarnya $1{,}2020569\ldots$)

CONTOH 7 — BERAPA SUKU YANG DIBUTUHKAN?

Berapa suku $\sum \frac{1}{n^4}$ perlu dijumlahkan agar galat $< 10^{-5}$? Dari $R_n \le \int_n^\infty x^{-4}dx = \dfrac{1}{3n^3}$, kita perlu $\dfrac{1}{3n^3} < 10^{-5} \iff n^3 > 33\,333{,}3 \iff n \ge 33$ (karena $32^3 = 32\,768 < 33\,333$ dan $33^3 = 35\,937$). Dengan $n = 33$: $s_{33} \approx 1{,}082314$, sedangkan nilai eksak $\pi^4/90 \approx 1{,}082323$; selisihnya $\approx 9 \times 10^{-6} < 10^{-5}$. ✓

CONTOH 8 — TAKSIRAN UNTUK $\sum \frac{1}{N^2}$ DAN HARMONIK

(a) $\sum \frac{1}{n^2}$ dengan $n = 10$: $s_{10} \approx 1{,}549768$, $\int_{11}^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{11}$, $\int_{10}^\infty = \frac{1}{10}$. Maka $1{,}6407 \le s \le 1{,}6498$; nilai eksak $\pi^2/6 \approx 1{,}6449$ ✓. Konvergensinya lambat: galat $R_n \approx 1/n$, sehingga butuh seribu suku untuk tiga desimal.

(b) Harmonik: untuk deret divergen, ketaksamaan yang sama memberi $\ln(n+1) \le H_n \le 1 + \ln n$. Jadi H_{1000} ada di antara $6{,}91$ dan $7{,}91$ (nilai sebenarnya $\approx 7{,}485$). Deret harmonik tumbuh seperti $\ln n$.

6. Kesalahan umum

- Menganggap $\sum a_n = \int_1^\infty f$. Hanya *sifat* konvergen/divergennya yang sama.
- Memakai uji integral pada fungsi yang tidak menurun atau bernilai negatif.
- Menyimpulkan konvergen dari $a_n \to 0$. Harmonik menuju 0 tetapi divergen.
- Mengira $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p = 1$; batasnya *tegas* $p > 1$.

7. Ringkasan

- Uji integral: f positif, kontinu, menurun $\Rightarrow \sum f(n)$ dan $\int^{\infty} f$ sama-sama konvergen/divergen.
- Deret-p: konvergen $\iff p > 1$.
- Sisa: $\int_{n+1}^{\infty} f \le R_n \le \int_{n}^{\infty} f$; gunakan untuk menaksir jumlah dan menentukan banyak suku.

Lanjut ke 11.4 Uji Perbandingan, yang memanfaatkan deret-p dan geometri sebagai pembanding.