Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.2 Deret

Pada subbab sebelumnya kita mempelajari barisan: daftar bilangan yang tak berujung. Sekarang kita bertanya sesuatu yang lebih berani: apa artinya *menjumlahkan* semua anggota daftar itu? Menjumlahkan tak hingga banyak bilangan terdengar mustahil, tetapi justru dari pertanyaan inilah lahir deret pangkat, deret Taylor, dan banyak sekali metode hampiran dalam sains. Kuncinya sederhana: kita tidak pernah benar-benar menjumlahkan tak hingga suku; kita menjumlahkan sebanyak-banyaknya suku pertama, lalu melihat *ke mana jumlah itu menuju*.

1. Deret dan jumlah parsial

Diberikan barisan $\{a_n\}$. Ekspresi formal

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

disebut **deret tak hingga** (singkatnya deret). Bilangan a_n disebut suku ke-n. Karena tak mungkin menjumlahkan semuanya sekaligus, kita membentuk barisan baru dari jumlah suku-suku awal:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

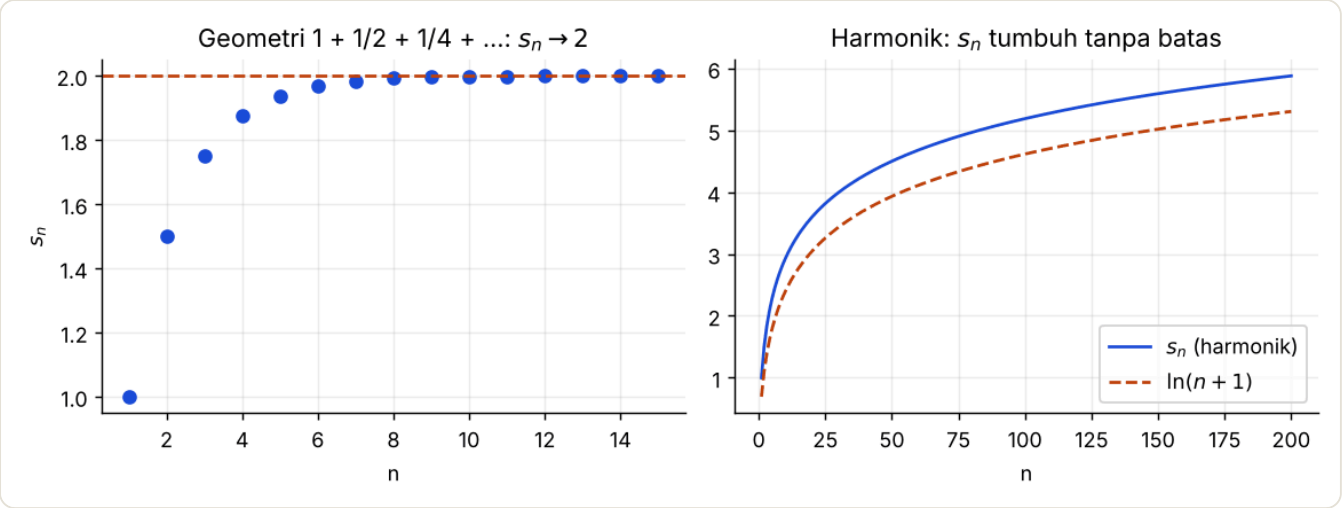
Bilangan s_n disebut **jumlah parsial ke-n**.

DEFINISI — KEKONVERGENAN DERET

Deret $\sum a_n$ disebut **konvergen** bila barisan jumlah parsial $\{s_n\}$ konvergen, yaitu $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ada sebagai bilangan real. Bilangan s disebut **jumlah** deret dan kita tulis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Bila $\{s_n\}$ divergen, deretnya **divergen** dan tidak punya jumlah.

Jadi "jumlah tak hingga" adalah *limit* dari jumlah hingga. Seluruh teori deret pada dasarnya adalah teori barisan $\{s_n\}$. Perhatikan perbedaan peran: $\{a_n\}$ adalah barisan suku, $\{s_n\}$ adalah barisan jumlah parsial; keduanya sering dikacaukan.

Indeks awal tidak harus 1. Deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ atau $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ diperlakukan sama. Mengubah (atau membuang) sejumlah *berhingga* suku di awal tidak mengubah apakah deret konvergen atau tidak (hanya mengubah nilai jumlahnya); ini sangat berguna pada uji-uji di subbab berikutnya.



Kiri: jumlah parsial deret $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ mendekati 2 dan tidak pernah melampauinya. Kanan: jumlah parsial deret harmonik terus naik, mengikuti $\ln(n+1)$, sehingga tidak terbatas.

2. Deret geometri

Deret yang setiap suku diperoleh dari suku sebelumnya dengan mengalikan konstanta r (rasio) disebut deret geometri:

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{\,n-1} \qquad (a \neq 0).$$

Penurunan jumlah. Untuk $r \neq 1$, kalikan $s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$ dengan r:

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n.$$

Kurangkan kedua persamaan: semua suku tengah saling meniadakan, tersisa $s_n - rs_n = a - ar^n$, sehingga

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Bila $|r| < 1$, maka $r^n \to 0$ dan $s_n \to \dfrac{a}{1-r}$. Bila $|r| > 1$, r^n tak terbatas sehingga s_n divergen. Bila $r = 1$, $s_n = na \to \pm\infty$; bila $r = -1$, s_n berayun antara a dan 0: divergen.

TEOREMA — DERET GEOMETRI

Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ **konvergen jika** $|r| < 1$ dengan jumlah

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{\,n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\text{suku pertama}}{1-\text{rasio}},$$

dan **divergen jika** $|r| \geq 1$.

Rumus "suku pertama dibagi satu kurang rasio" adalah salah satu rumus yang paling sering dipakai dalam seluruh bab ini. Perhatikan bahwa "suku pertama" harus benar-benar suku yang pertama kali muncul pada indeks awal yang digunakan.

CONTOH 1 — GEOMETRI DENGAN RASIO NEGATIF

Hitung $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\tfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Suku pertama $a = 3$, rasio $r = -\frac{2}{5}$ dengan $|r| = \frac{2}{5} < 1$, jadi konvergen:

$$\sum = \frac{3}{1-(-2/5)} = \frac{3}{7/5} = \frac{15}{7} \approx 2{,}1429.$$

Jumlah parsial berayun di sekitar $15/7$: $s_1 = 3,\ s_2 = 1{,}8,\ s_3 = 2{,}28,\ s_4 = 2{,}088, \ldots$

CONTOH 2 — MENGUBAH DESIMAL BERULANG MENJADI PECAHAN

Nyatakan $0{,}4272727\ldots = 0{,}4\overline{27}$ sebagai pecahan.

Pisahkan bagian yang tidak berulang: $0{,}4 + 0{,}027 + 0{,}00027 + 0{,}0000027 + \cdots$. Mulai dari suku kedua, ini deret geometri dengan $a = 0{,}027$ dan $r = 0{,}01$:

$$0{,}027 + 0{,}00027 + \cdots = \frac{0{,}027}{1-0{,}01} = \frac{0{,}027}{0{,}99} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}.$$

Maka $0{,}4\overline{27} = \frac{4}{10} + \frac{3}{110} = \frac{44+3}{110} = \frac{47}{110}$. Cek: $47/110 = 0{,}427272\ldots$

CONTOH 3 — BOLA MEMANTUL

Bola dijatuhkan dari ketinggian 10 m. Setiap kali menumbuk lantai, bola memantul setinggi $\frac{3}{4}$ dari ketinggian sebelumnya. Berapa total jarak yang ditempuh bola sampai berhenti (secara idealisasi)?

Jarak awal turun: 10 m. Setelah itu, setiap pantulan ke-k mencapai tinggi $10(3/4)^k$ dan jarak naik-turunnya adalah dua kalinya. Jadi

$$D = 10 + 2\sum_{k=1}^{\infty} 10\left(\tfrac{3}{4}\right)^{k} = 10 + 2\cdot\frac{10\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 10 + 2\cdot 30 = 70 \text{ m}.$$

Suku pertama deret di dalam adalah $10\cdot\frac{3}{4} = 7{,}5$, bukan 10: itu sebabnya kita harus teliti menetapkan "suku pertama".

CONTOH 4 — GEOMETRI BERGANTUNG X

Untuk x apa saja deret $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$ konvergen, dan berapa jumlahnya?

Deretnya $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^n$: geometri dengan $a=1$, $r=\dfrac{x-2}{3}$. Konvergen bila $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| < 1$, yaitu $|x-2|<3$ atau $-1<x<5$, dengan jumlah

$$\frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} = \frac{3}{5-x}.$$

Untuk x di luar selang itu (termasuk ujung $x=-1$ dan $x=5$ karena $|r|=1$), deret divergen. Ini cuplikan pertama dari *deret pangkat* yang kita pelajari di subbab 11.8.

3. Deret teleskop

Tidak semua deret konvergen bersifat geometri. Kadang suku-suku jumlah parsial saling menghapus secara beruntun ("melipat" seperti teleskop). Triknya biasanya pecahan parsial.

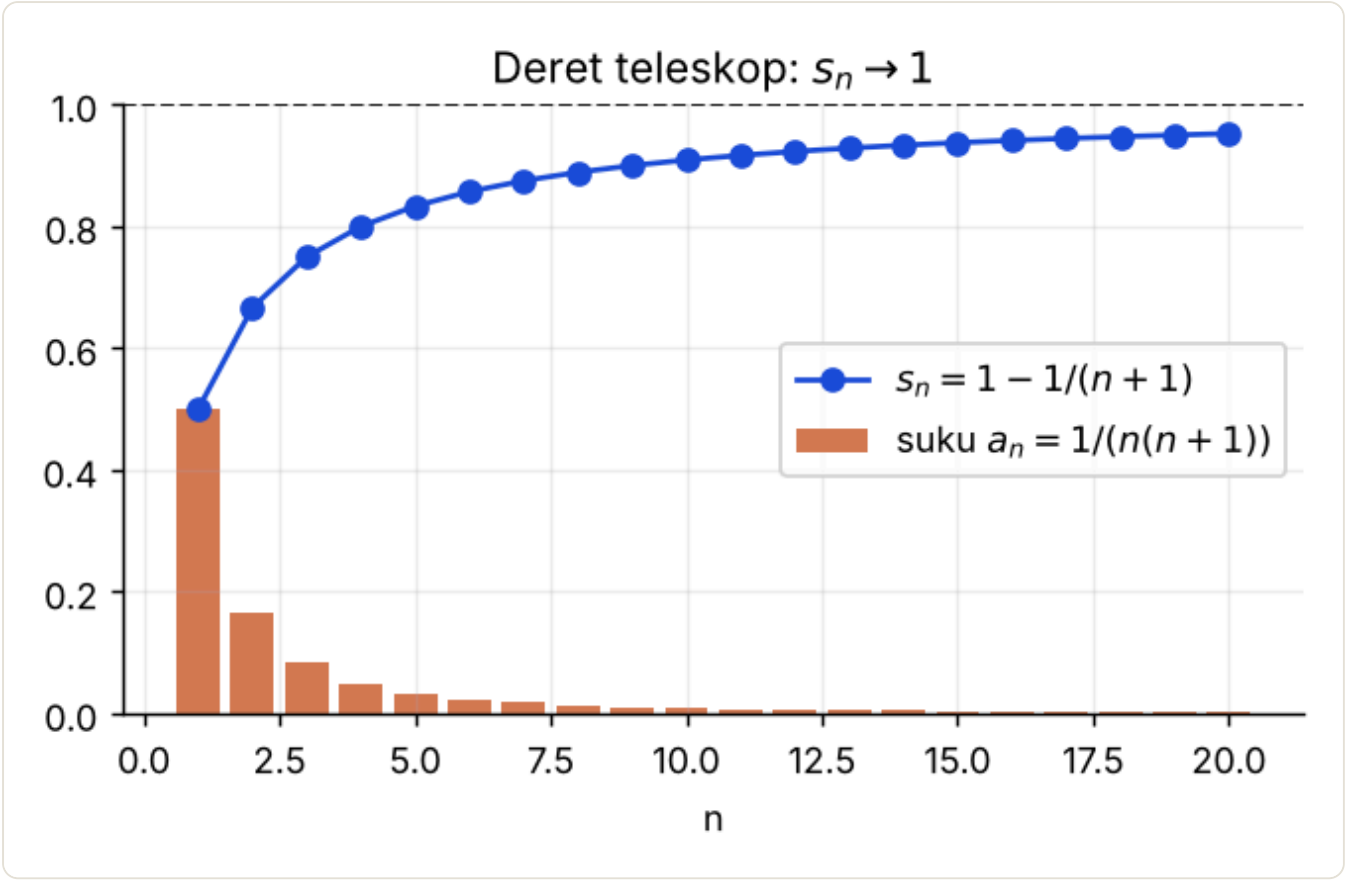
CONTOH 5 — TELESKOP DENGAN PECAHAN PARSIAL

Tentukan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Uraikan $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Maka

$$s_n = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Karena $s_n \to 1$, deretnya konvergen dengan jumlah 1.



Batang: suku $a_n = 1/(n(n+1))$. Titik: jumlah parsial $1 - 1/(n+1)$ yang mendekati 1.

CONTOH 6 — TELESKOP DENGAN SELISIH DUA LANGKAH

Hitung $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

Faktorkan $n^2-1=(n-1)(n+1)$ dan uraikan $\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$.
Sekarang suku yang saling hapus berjarak dua langkah:

$$s_N=\frac{1}{2}\left[\left(1-\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N-1}-\tfrac{1}{N+1}\right)\right].$$

Yang bertahan hanyalah 1 dan $\frac{1}{2}$ di depan, serta $-\frac{1}{N}$ dan $-\frac{1}{N+1}$ di belakang:

$$s_N=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\longrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

CONTOH 7 — TELESKOP YANG DIVERGEN

Selidiki $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\!\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Tulis $\ln\!\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$. Maka $s_n=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\to\infty$. Deretnya *divergen*, meskipun sukunya $\ln(1+1/n)\to 0$. Contoh ini akan kita pakai untuk menunjukkan bahwa suku menuju nol tidak cukup untuk kekonvergenan.

4. Deret harmonik: suku menuju nol, tetapi deret divergen

Deret harmonik $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ adalah contoh paling terkenal. Sukunya mengecil menuju nol, tetapi jumlahnya tidak terbatas.

TEOREMA — DERET HARMONIK DIVERGEN

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergen.

Bukti (pengelompokan ala Oresme). Perhatikan jumlah parsial dengan banyak suku pangkat dua:

$$s_2=1+\tfrac{1}{2},\qquad s_4=1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)>1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)=1+\tfrac{2}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) > s_4 + 4 \cdot \tfrac{1}{8} > 1 + \tfrac{3}{2}.$$

Secara umum, kelompok $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}$ memiliki 2^{k-1} suku, masing-masing paling sedikit $\frac{1}{2^k}$, sehingga jumlah kelompok itu $\geq \frac{1}{2}$. Dengan induksi, $s_{2^k} \geq 1 + \dfrac{k}{2}$. Barisan $\{s_{2^k}\}$ tak terbatas, maka $\{s_n\}$ (yang naik) tak terbatas dan divergen. $\blacksquare$

Divergensinya sangat lambat: untuk melampaui 100 dibutuhkan lebih dari $e^{100} \approx 2{,}7 \times 10^{43}$ suku. Inilah alasan mengapa pengamatan numerik saja tidak boleh dipercaya untuk memutuskan kekonvergenan.

5. Uji divergensi (uji suku ke-n)

Bila deret $\sum a_n$ konvergen, jumlah parsialnya mendekati s, sehingga s_n dan s_{n-1} keduanya mendekati s. Suku $a_n = s_n - s_{n-1}$ pun harus mendekati $s - s = 0$.

TEOREMA

Jika $\sum a_n$ konvergen, maka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kontraposisinya adalah alat praktis:

UJI DIVERGENSI

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada atau tidak sama dengan 0, maka $\sum a_n$ **divergen**.

JEBAKAN YANG PALING SERING

Kebalikannya **salah**: $a_n \to 0$ *tidak* menjamin $\sum a_n$ konvergen. Deret harmonik $\sum 1/n$ dan deret $\sum \ln(1 + 1/n)$ pada Contoh 7 adalah dua contoh tandingnya. Uji divergensi hanya bisa membuktikan divergen; bila $a_n \to 0$, ia tidak berkata apa-apa dan kita harus memakai uji lain.

CONTOH 8 — MEMAKAI UJI DIVERGENSI

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$: $a_n \to \tfrac{1}{2} \neq 0$, divergen.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$: $a_n \to e \neq 0$, divergen.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}$: a_n berayun antara -1 dan 1, limitnya tidak ada, divergen.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2-3n+7}$: $a_n \to 1 \neq 0$, divergen.

6. Sifat aljabar deret

TEOREMA — KELINEARAN

Bila $\sum a_n = A$ dan $\sum b_n = B$ konvergen dan c konstanta, maka $\sum ca_n = cA$, $\sum(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

Buktinya langsung: jumlah parsial deret gabungan adalah gabungan jumlah parsial, lalu gunakan sifat limit barisan. Dua konsekuensi yang perlu diingat: (i) konvergen $\pm$ konvergen adalah konvergen; (ii) konvergen $\pm$ divergen adalah *divergen* (bila tidak, selisihnya akan konvergen, kontradiksi). Namun divergen $\pm$ divergen tidak dapat ditebak: $\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n} = \sum 0$ konvergen.

CONTOH 9 — MEMECAH MENJADI DUA GEOMETRI

Hitung $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$.

Pisahkan menjadi $\sum\left(\tfrac{1}{3}\right)^n + \sum\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$. Mulai dari $n=1$:

$$\frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

CONTOH 10 — BILA SATU BAGIAN DIVERGEN

Apakah $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right)$ konvergen?

Bagian pertama konvergen (geometri, jumlah 1), bagian kedua divergen (harmonik). Jumlah konvergen dan divergen adalah divergen, jadi deret itu divergen.

7. Ringkasan

- $\sum a_n$ konvergen $\iff$ barisan jumlah parsial s_n konvergen; jumlah deret adalah $\lim s_n$.
- Geometri $\sum ar^{n-1}$: konvergen untuk $|r|<1$ dengan jumlah $\frac{a}{1-r}$; divergen untuk $|r|\geq 1$.
- Teleskop: uraikan suku menjadi selisih, tuliskan s_n, lihat apa yang bertahan.
- Harmonik $\sum 1/n$ divergen walaupun $a_n \to 0$.
- Uji divergensi: $a_n \not\to 0 \Rightarrow$ divergen. Tidak dapat dipakai untuk membuktikan kekonvergenan.
- Kelinearan hanya berlaku bila kedua deret konvergen.

Pada subbab berikutnya kita mulai memutuskan kekonvergenan deret yang jumlah parsialnya tidak punya rumus tertutup, dimulai dengan Uji Integral.