Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.11 Penerapan Polinomial Taylor

Pada 11.10 kita melihat bahwa deret Taylor bisa mewakili fungsi secara tepat. Dalam praktik kita hampir selalu memotong deret setelah beberapa suku dan memakai **polinomial Taylor** sebagai hampiran. Pertanyaan pentingnya: *seberapa besar galatnya, dan berapa suku yang cukup?* Subbab ini menjawabnya, lalu memakainya pada hampiran nilai, limit, dan masalah fisika.

1. Polinomial Taylor

DEFINISI

Polinomial Taylor derajat n dari f di a adalah jumlah parsial deret Taylor:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Sisa (galat) hampiran: $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

- $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$: *hampiran linear* (garis singgung).
- $T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$: *hampiran kuadrat*, memperhitungkan kelengkungan.

T_n adalah polinomial berderajat $\le n$ yang nilai dan turunan $1, \ldots, n$-nya **sama** dengan f di a. Karena itu ia sangat akurat dekat a dan makin kurang akurat bila menjauh.

CONTOH 1 — T_N UNTUK $F(X) = \mathrm{LN}\, X$ DI $A = 1$

$f' = \frac{1}{x},\ f'' = -\frac{1}{x^2},\ f''' = \frac{2}{x^3},\ f^{(4)} = -\frac{6}{x^4}$. Di $x = 1$: $f = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -6$. Maka

$$T_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

(Sama dengan deret $\ln(1+u)$ dengan $u = x - 1$.) Nilai $T_3(1{,}2) = 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}00267 = 0{,}18267$, sedangkan $\ln 1{,}2 = 0{,}18232$.

CONTOH 2 — T_3 UNTUK $F(X) = \cos X$ DI $A = \frac{\pi}{3}$

$f = \frac{1}{2},\ f' = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'' = -\frac{1}{2},\ f''' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Maka

$$T_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3.$$

2. Seberapa baik hampiran? Sisa Taylor

TEOREMA TAYLOR (BENTUK LAGRANGE)

Jika f mempunyai turunan ke-$(n+1)$ pada interval yang memuat a dan x, maka ada bilangan z antara a dan x sehingga

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

KETAKSAMAAN TAYLOR

Jika $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ untuk semua t antara a dan x, maka

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Gagasan bukti (untuk $n=1$, arah $x > a$): $R_1(a) = R_1'(a) = 0$ dan $R_1'' = f''$. Bila $|f''| \le M$, maka $|R_1'(t)| \le M(t-a)$ dengan integrasi dari a dan kemudian $|R_1(x)| \le \frac{M}{2}(x-a)^2$. Pengulangan argumen ini sebanyak $n+1$ kali menghasilkan ketaksamaan umum.

Bila $R_n(x) \to 0$ untuk $n \to \infty$, maka deret Taylor konvergen ke $f(x)$. Pembuktian pada 11.10 untuk $e^x, \sin x, \cos x$ memakai ketaksamaan ini dan fakta $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$.

3. Menghampiri nilai

CONTOH 3 — MENGHITUNG $\sin 0{,}5$

Pakai $T_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ di $a = 0$:

$$T_5(0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}0208333 + 0{,}00026042 = 0{,}479427.$$

Galat: turunan ke-6 dari $\sin$ dibatasi $M = 1$, jadi $|R_5(0{,}5)| \le \dfrac{0{,}5^6}{6!} = \dfrac{1}{46\,080} \approx 2{,}2 \times 10^{-5}$. Nilai sebenarnya $0{,}4794255$; galat nyata $1{,}5 \times 10^{-6}$ (jauh di bawah batas; batas Taylor adalah *jaminan*, bukan perkiraan galat).

CONTOH 4 — MENGHITUNG e DENGAN GALAT $< 10^{-5}$

Untuk $f = e^x$ di 0 dan $x = 1$: turunan semuanya $e^t \le e < 3$ pada $[0, 1]$. Jadi $|R_n(1)| \le \dfrac{3}{(n+1)!}$. Syarat $< 10^{-5}$: $(n+1)! > 3 \times 10^5$. Karena $9! = 362\,880$, cukup $n = 8$. Maka

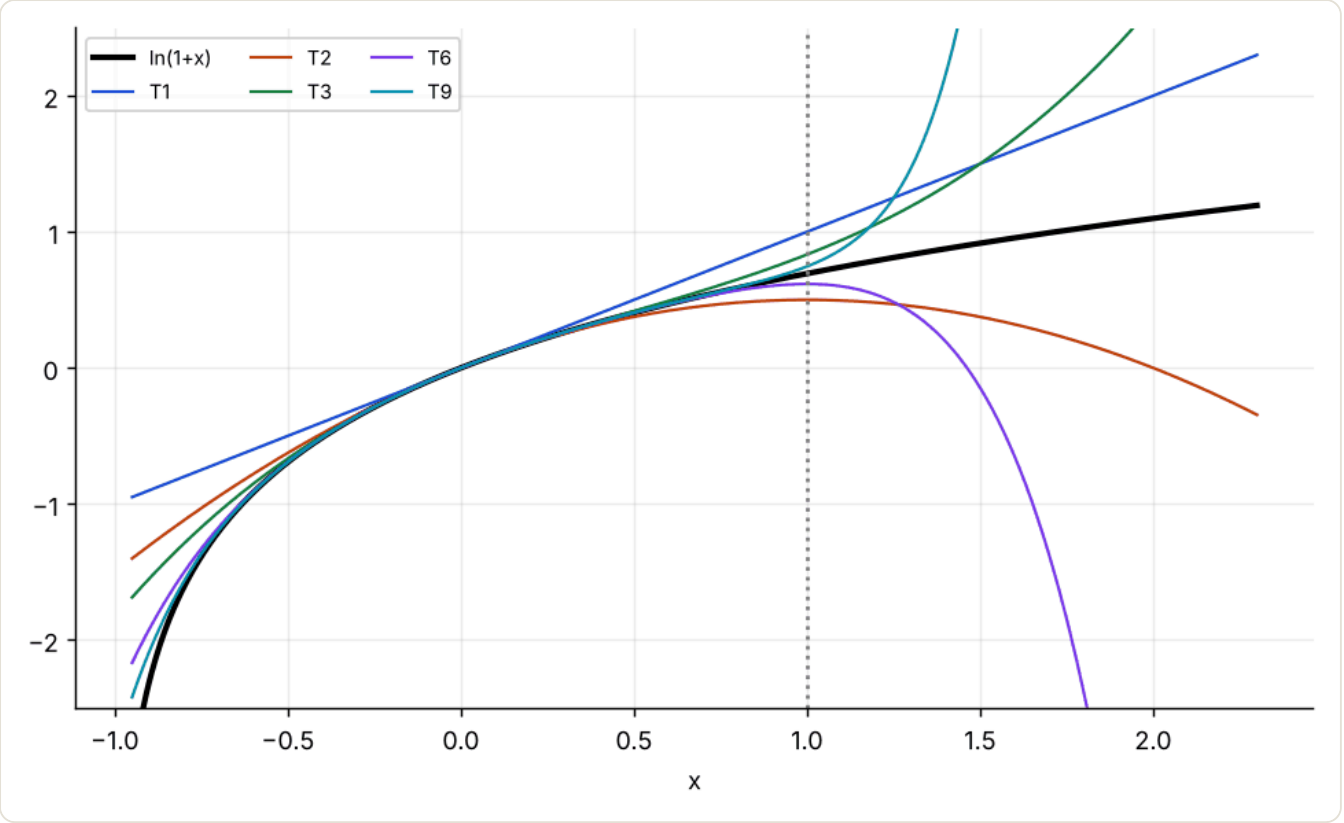
$$e \approx \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} = 2{,}718279, \qquad \text{galat sebenarnya } 3{,}1 \times 10^{-6}.$$

CONTOH 5 — AKAR PANGKAT TIGA DENGAN DERET BINOMIAL

$\sqrt[3]{8{,}2} = 2\sqrt[3]{1 + 0{,}025}$. Binomial dengan $k = \frac{1}{3}$: $(1+x)^{1/3} \approx 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9}$. Untuk $x = 0{,}025$: $1 + 0{,}008333 - 0{,}0000694 = 1{,}008264$, sehingga $\sqrt[3]{8{,}2} \approx 2{,}016528$. Nilai sebenarnya $2{,}016530$. Galat $\approx 2 \times 10^{-6}$, sesuai suku berikutnya $\frac{5x^3}{81} \cdot 2 \approx 1{,}9 \times 10^{-6}$.

CONTOH 6 — $\ln 1{,}5$ DAN BATAS SELANG

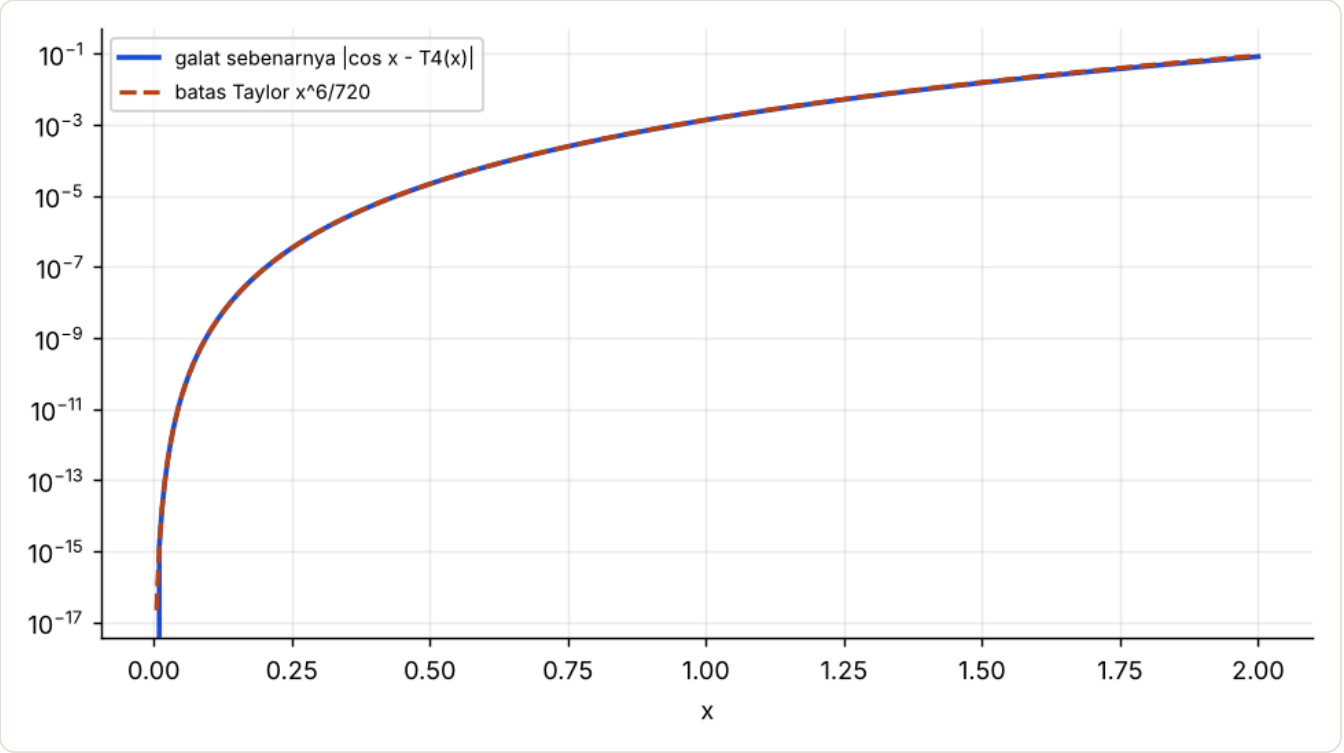
$\ln(1+x)$ pada $x = 0{,}5$ (di dalam selang $(-1, 1]$): deret berganti tanda $0{,}5 - 0{,}125 + 0{,}0417 - 0{,}0156 + \cdots$. $T_3 = 0{,}4167$, $T_5 = 0{,}4073$, $T_{10} = 0{,}40543$ vs $\ln 1{,}5 = 0{,}405465$. Karena berganti tanda, galat $\le$ suku berikutnya.



Polinomial Taylor $\ln(1+x)$: hampiran baik hanya untuk $-1 < x \leq 1$. Di luar selang itu (garis putus-putus di $x = 1$), makin tinggi derajat, makin buruk.

CONTOH 7 — GALAT T_4 UNTUK $\cos x$ PADA $x = 1$

$T_4(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = 0{,}541667$. Karena suku x^5 dari $\cos x$ bernilai nol, $T_4 = T_5$, sehingga kita boleh memakai ketaksamaan Taylor dengan $n = 5$ dan turunan ke-6 ($f^{(6)} = -\cos x$, $M = 1$): $|R_5(1)| \leq \dfrac{1}{6!} = 0{,}001389$. Galat nyata $\cos 1 - T_4(1) = -0{,}001364$, tepat di bawah batas.



Galat sebenarnya $|\cos x - T_4(x)|$ dan batas Taylor $x^6/720$ hampir berimpit pada skala logaritmik.

4. Apa yang menentukan keakuratan?

- **Jarak** $|x-a|$: galat tumbuh seperti $|x-a|^{n+1}$; makin dekat pusat makin baik.
- **Derajat** n: biasanya makin besar makin baik, asalkan x di dalam selang kekonvergenan.
- **Pusat** a: pilih a dekat nilai yang diinginkan dan yang turunannya mudah dihitung (mis. $a=8$ untuk $\sqrt[3]{8{,}2}$).

5. Limit yang rumit

CONTOH 8 — $\displaystyle\lim_{X\to 0}\frac{\cos X - 1 + \frac{X^2}{2}}{X^4}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$, jadi pembilangnya $\dfrac{x^4}{24} - \cdots$. Limit $= \dfrac{1}{24}$.

CONTOH 9 — $\displaystyle\lim_{X\to 0}\frac{\sin X - X\cos X}{X^3}$

$x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \cdots$ dan $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$. Selisih $= \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \cdots = \dfrac{x^3}{3} + \cdots$. Limit $= \dfrac{1}{3}$.

6. Penerapan dalam fisika

CONTOH 10 — ENERGI RELATIVISTIK

Energi total partikel bermassa m dengan kecepatan v: $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Misalkan $u = v^2/c^2$. Deret binomial $(1-u)^{-1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{8}u^2 + \cdots$ memberi

$$E = mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \cdots$$

Suku pertama adalah energi diam, suku kedua adalah energi kinetik klasik. Untuk $v = 0{,}1c$, energi kinetik sebenarnya $(\gamma - 1)mc^2 = 0{,}005038\,mc^2$, sedangkan hampiran klasik $\tfrac{1}{2}mv^2 = 0{,}005\,mc^2$: selisih kurang dari 1%.

CONTOH 11 — BANDUL SEDERHANA

Persamaan gerak bandul: $\theta'' = -\tfrac{g}{L}\sin\theta$. Karena $\sin\theta = \theta - \tfrac{\theta^3}{6} + \cdots$, untuk simpangan kecil kita ganti $\sin\theta \approx \theta$, sehingga $\theta'' = -\tfrac{g}{L}\theta$ (osilator harmonik, lihat 17.3). Galat hampiran $< \tfrac{\theta^3}{6}$: pada $\theta = 0{,}2$ rad (sekitar 11°) hanya $0{,}0013$, kurang dari 1% dari θ.

CONTOH 12 — HAMPIRAN INTEGRAL

Gelombang optik memakai $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (fungsi sinus integral) yang tidak punya antiturunan elementer. Deret: $\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} - \cdots$, jadi $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \cdots$, berlaku untuk semua x.

7. Kesalahan umum

- Memakai polinomial Taylor jauh dari pusat atau di luar selang kekonvergenan.
- Menyamakan batas Taylor dengan galat sebenarnya (batas biasanya lebih longgar).
- Lupa memakai turunan ke-$(n+1)$, bukan ke-n, pada sisa.
- Memakai derajat n tetapi menghitung M dari turunan yang salah.

8. Ringkasan

- T_n adalah polinomial yang cocok dengan f beserta n turunan pertamanya di a; $R_n = f - T_n$.

- $|R_n(x)| \le \dfrac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ bila $|f^{(n+1)}| \le M$.
- Dipakai untuk menghampiri nilai, menentukan banyak suku, menghitung limit, dan menyederhanakan model fisika.

Dengan ini Bab 11 selesai. Bab 12 membuka materi tiga dimensi.