Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.10 Deret Taylor dan Maclaurin

Pada 11.9 kita memperoleh deret pangkat sebuah fungsi dengan trik aljabar yang hanya berhasil untuk fungsi tertentu. Sekarang kita berangkat dari pertanyaan umum: *jika f dapat dinyatakan sebagai deret pangkat, bagaimana koefisiennya ditentukan?* Jawabannya sangat rapi: koefisien ditentukan oleh turunan f di pusat.

1. Koefisien dari turunan

Misalkan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ untuk $|x-a| < R$. Substitusi $x = a$: $f(a) = c_0$. Turunkan suku demi suku (11.8):

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \Rightarrow f'(a) = c_1,$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2\, c_3(x-a) + \cdots \Rightarrow f''(a) = 2c_2,$$

$$f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\, c_3, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = n!\, c_n.$$

TEOREMA

Jika f mempunyai representasi deret pangkat di sekitar a, yaitu $f(x) = \sum c_n (x-a)^n$ untuk $|x-a| < R$, maka

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Representasi seperti itu, bila ada, **tunggal**.

2. Deret Taylor dan Maclaurin

DEFINISI

Untuk fungsi f yang mempunyai turunan semua orde di a, **deret Taylor** f di a adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +$$

Untuk $a = 0$, disebut **deret Maclaurin**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

DUA HAL YANG HARUS DIBEDAKAN

- Deret Taylor dapat *dibentuk* dari fungsi apa pun yang cukup mulus. Pertanyaannya adalah apakah deret itu *konvergen ke* f.
- Ada fungsi mulus yang deret Taylornya konvergen tetapi ke fungsi lain. Contoh klasik: $f(x) = e^{-1/x^2}$ ($f(0) = 0$) yang semua turunannya di 0 bernilai 0, sehingga deret Maclaurinnya adalah deret nol, padahal $f(x) \neq 0$ untuk $x \neq 0$.

3. Kapan deret Taylor sama dengan fungsi?

Misalkan $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ adalah **polinomial Taylor** derajat n dan $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ adalah **sisa**. Maka deret Taylor konvergen ke $f(x)$ tepat bila $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

KETAKSAMAAN TAYLOR

Jika $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ untuk semua t antara a dan x, maka

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}.$$

Teorema ini dibahas lebih rinci di 11.11. Dengan $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = 0$ untuk semua x (suku umum deret konvergen $\sum \frac{x^n}{n!}$, jadi menuju nol), kita pakai untuk fungsi e^x, $\sin x$, $\cos x$.

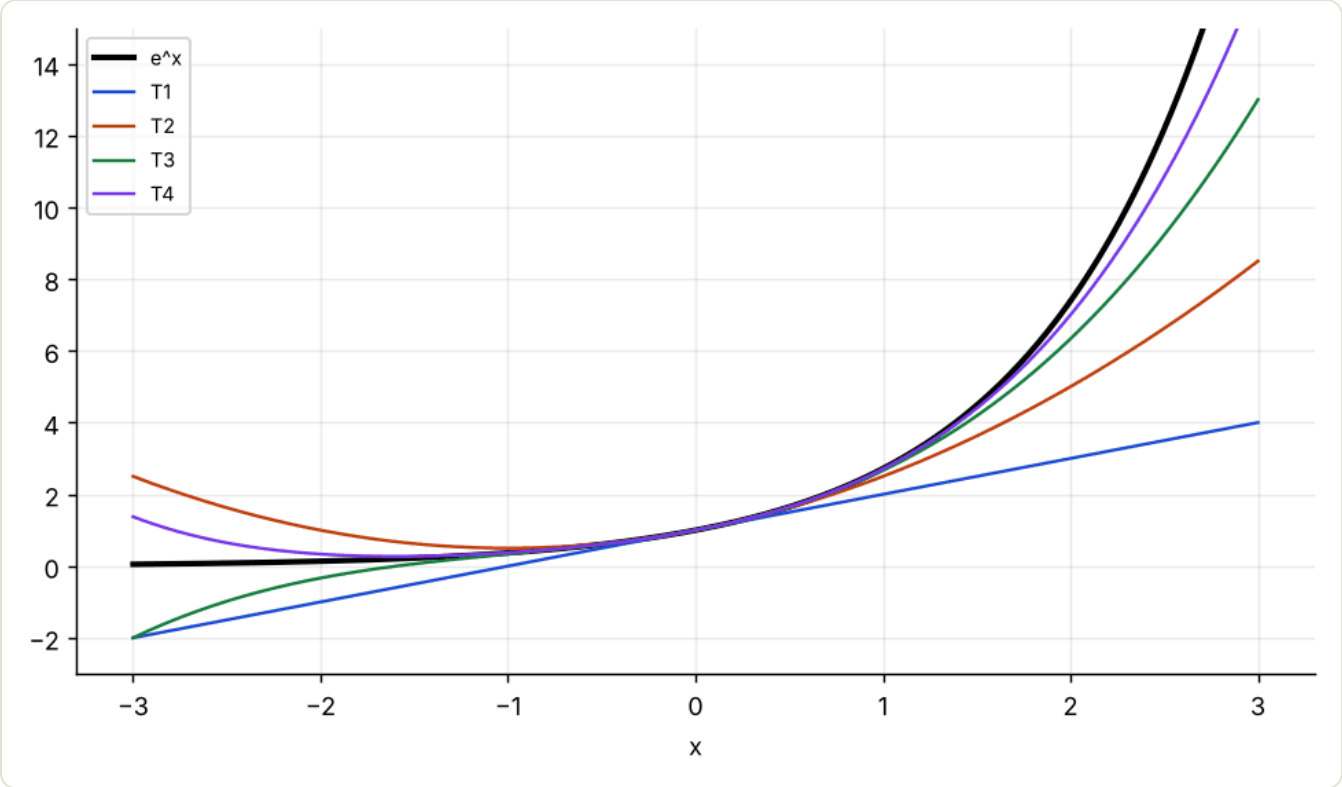
4. Deret Maclaurin yang harus dikuasai

CONTOH 1 — E^X

$f^{(n)}(x) = e^x$, jadi $f^{(n)}(0) = 1$. Maka $c_n = \frac{1}{n!}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (\text{semua } x).$$

Untuk sembarang x, pada interval antara 0 dan x berlaku $e^t \le e^{|x|} =: M$, maka $|R_n(x)| \le \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Jadi deret konvergen ke e^x di mana-mana. Khususnya $e = \sum \frac{1}{n!} = 2{,}71828\ldots$



Polinomial Taylor $T_1, \ldots, T_4$ menghampiri e^x makin baik di sekitar 0.

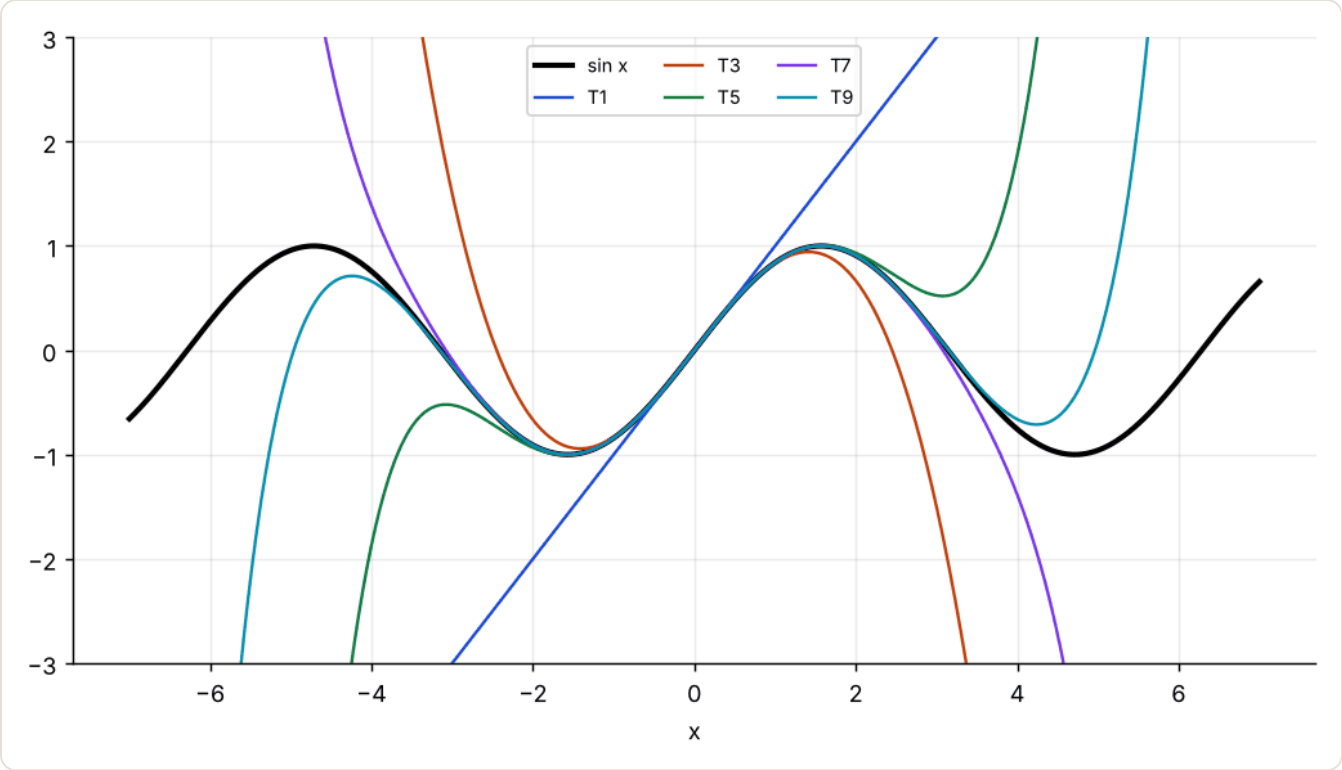
CONTOH 2 — SIN X DAN COS X

Turunan $\sin x$ berulang dengan periode 4: $\sin, \cos, -\sin, -\cos$; di 0 nilainya $0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$. Jadi hanya pangkat ganjil yang muncul:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Karena semua turunan dibatasi oleh $M = 1$, $|R_n| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$; berlaku untuk semua x. Dengan menurunkan suku demi suku:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$



T_1, T_3, T_5, T_7, T_9 dari $\sin x$; makin tinggi derajat, makin lebar selang yang cocok.

CONTOH 3 — LN$(1+X)$ DAN ARCTAN X

Dari 11.9: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ $(-1 < x \le 1)$ dan $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1 \le x \le 1)$. Ini sekaligus deret Maclaurinnya (keunikan). Di $x = 1$: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ dan $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$.

5. Deret binomial

Untuk bilangan real k sembarang, $f(x) = (1+x)^k$. Turunannya: $f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$. Jadi

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots, \qquad |x| <$$

dengan $\binom{k}{n} = \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$. Radius kekonvergenan 1 (uji rasio: $\left|\frac{k-n}{n+1}\right| |x| \to |x|$). Bila k bilangan bulat tak negatif, deret berhenti dan menjadi teorema binomial biasa.

CONTOH 4 — $\sqrt{1+X}$

$k = \frac{1}{2}$: koefisien $1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{5}{128}, \ldots$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots$$

Cek: $x = 0{,}1$: $\sqrt{1{,}1} = 1{,}04881$; empat suku memberi $1 + 0{,}05 - 0{,}00125 + 0{,}0000625 = 1{,}0488125$ ✓.

CONTOH 5 — $\dfrac{1}{(1+X)^2}$ DAN $\dfrac{1}{\sqrt{1-X^2}}$

(a) $k = -2$: koefisien $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$, jadi $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum (-1)^n (n+1) x^n$ (sesuai 11.9).

(b) $k = -\frac{1}{2}$ dengan x diganti $-x^2$: $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots$, $|x| < 1$. Integralkan: $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \dfrac{5x^7}{112} + \dfrac{35x^9}{1152} + \cdots$

6. Membuat deret baru dari deret yang diketahui

CONTOH 6 — SUBSTITUSI: E^{-X^2}

Ganti x dengan $-x^2$ pada deret e^x: $e^{-x^2} = \sum \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots$ (semua x). Integralkan untuk fungsi galat:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

Empat suku pertama sampai $\frac{1}{216}$ memberi $0{,}74749$; galat $\le \frac{1}{5!\cdot 11} \approx 7{,}6 \times 10^{-4}$. Hasil sebenarnya $0{,}746824$; selisih $6{,}7 \times 10^{-4}$ ✓.

CONTOH 7 — PERKALIAN: $E^X \operatorname{SIN} X$

Kalikan deret dan kumpulkan pangkat yang sama:

$$\left(1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + \cdots\right)\left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} - \cdots\right) = x + x^2 + \tfrac{x^3}{3} + 0\cdot x^4 - \tfrac{x^5}{30} -$$

Koefisien x^3: $\frac{1}{2}\cdot 1$ (dari $\frac{x^2}{2}\cdot x$) $+ 1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$ ✓. Koefisien x^4: $\frac{1}{6}\cdot 1$ (dari $\frac{x^3}{6}\cdot x$) $+ 1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$ (dari $x\cdot\left(-\frac{x^3}{6}\right)$) $= 0$ ✓.

CONTOH 8 — PEMBAGIAN: $\operatorname{TAN} X$

Tulis $\tan x = \sin x / \cos x = c_1 x + c_3 x^3 + \cdots$, lalu selesaikan $(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots)(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$. Samakan koefisien: $c_1 = 1$; $c_3 - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$; $c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24} = \frac{1}{120} \Rightarrow c_5 = \frac{2}{15}$. Maka

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad \left(|x| < \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Radiusnya $\frac{\pi}{2}$ karena $\tan x$ tak terdefinisi di $\pm\frac{\pi}{2}$.

7. Menghitung limit dengan deret

CONTOH 9 — $\operatorname{LIM}_{X\to 0}\dfrac{X-\operatorname{SIN} X}{X^3}$

$x-\sin x=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^5}{120}+\cdots$. Bagi x^3: $\dfrac{1}{6}-\dfrac{x^2}{120}+\cdots\to\dfrac{1}{6}$. (Dengan l'Hôpital perlu tiga kali; deret lebih cepat.)

CONTOH 10 — $\operatorname{LIM}_{X\to 0}\dfrac{E^X-1-X}{X^2}$

$e^x-1-x=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots$, sehingga limitnya $\dfrac{1}{2}$.

CONTOH 11 — $\operatorname{LIM}_{X\to 0}\dfrac{\operatorname{SIN} X-X+X^3/6}{X^5}$

Pembilang $=\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{5040}+\cdots$. Limit $=\dfrac{1}{120}$. Numerik: pada $x=0{,}01$ hasilnya $0{,}0083333\approx\frac{1}{120}$ ✓.

8. Menjumlahkan deret bilangan

CONTOH 12

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$: bentuk $\sin x$ dengan $x=\frac{\pi}{4}$ (karena $\frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$). Jumlah $=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}=e^2-1\approx 6{,}389$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}=e^{-1}$ (lihat taksiran galat di 11.5).

9. Tabel deret Maclaurin

Fungsi	Deret	Selang
$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum x^n$	$(-1,1)$
e^x	$\sum \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1,1]$
$\ln(1+x)$	$\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$(-1,1]$
$(1+x)^k$	$\sum \binom{k}{n} x^n$	$(-1,1)$

10. Kesalahan umum

- Mengira deret Taylor selalu menyamai fungsinya (periksa $R_n \to 0$ atau gunakan keunikan).
- Lupa faktor $n!$ pada penyebut koefisien.
- Menggunakan deret binomial untuk $|x| \geq 1$.
- Salah menggeser indeks saat substitusi (mis. x^2 untuk x pada e^x).

11. Ringkasan

- Koefisien Taylor: $c_n = f^{(n)}(a)/n!$; representasi pangkat bila ada adalah tunggal.
- Deret Maclaurin standar: $e^x, \sin x, \cos x, \arctan x, \ln(1+x), (1+x)^k$; hafalkan.
- Substitusi, perkalian, pembagian, turunan, dan integral menghasilkan deret baru; deret juga memudahkan limit.

Berikutnya 11.11: berapa dekat polinomial Taylor ke fungsi, dan penerapannya.