Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.1 Barisan

1. Apa itu barisan?

Barisan adalah daftar bilangan yang ditulis dalam urutan tertentu:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

a_1 disebut suku pertama, a_2 suku kedua, dan secara umum a_n adalah suku ke-n. Kita hanya membahas barisan *tak hingga*: setiap suku a_n memiliki penerus a_{n+1}.

Karena untuk tiap bilangan bulat positif n ada tepat satu bilangan a_n, barisan sama saja dengan **fungsi** dengan daerah asal bilangan bulat positif; kita menulis a_n sebagai pengganti $f(n)$. Notasi barisan: $\{a_n\}$ atau $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Indeks tidak harus mulai dari 1; misalnya $\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$.

CONTOH 1 — TIGA CARA MENYEBUT BARISAN

NOTASI	RUMUS SUKU KE-N	SUKU-SUKU
$\left\{\dfrac{N}{N+1}\right\}$	$A_N = \dfrac{N}{N+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
$\left\{\dfrac{(-1)^N(N+1)}{3^N}\right\}$	$A_N = \dfrac{(-1)^N(N+1)}{3^N}$	$-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \cdots$
$\{\sqrt{N-3}\}_{N=3}^{\infty}$	$A_N = \sqrt{N-3}$	$0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$
$\{\cos \frac{N\pi}{6}\}_{N=0}^{\infty}$	$A_N = \cos \frac{N\pi}{6}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots$

Mencari rumus dari pola

CONTOH 2

Cari rumus suku ke-n dari $\frac{3}{5},\ -\frac{4}{25},\ \frac{5}{125},\ -\frac{6}{625},\ \frac{7}{3125},\dots$

- Pembilang: 3, 4, 5, 6, 7, … naik 1 mulai dari 3, jadi $n+2$.
- Penyebut: pangkat 5, yaitu 5^n.
- Tanda: positif untuk $n=1$, lalu bergantian, sehingga faktor $(-1)^{n-1}$ (atau $-(-1)^n$).

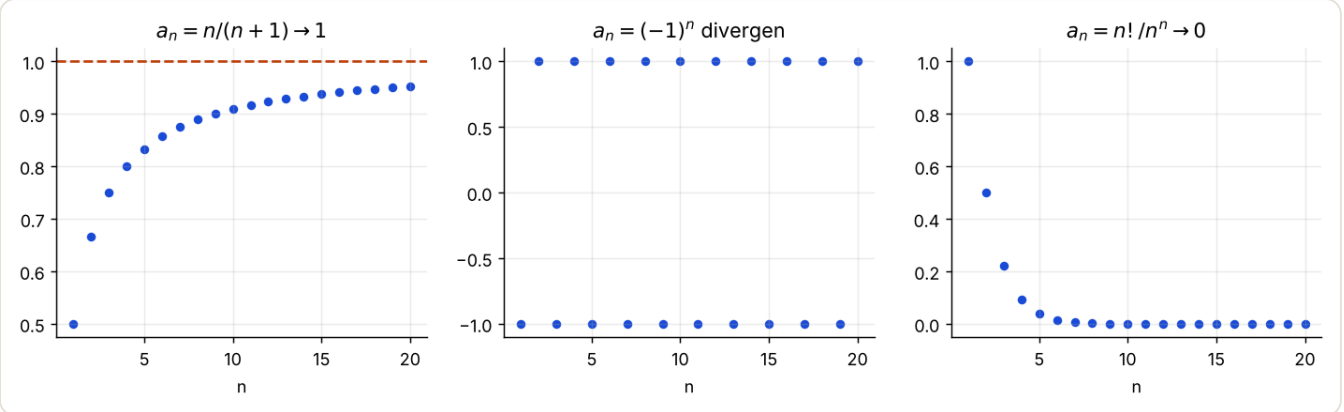
Jawab: $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+2}{5^n}$.

Barisan yang tidak punya rumus sederhana

- p_n = populasi dunia pada 1 Januari tahun ke-n.
- a_n = angka desimal ke-n dari bilangan $e = 2.7182818\dots$; barisannya terdefinisi dengan baik: $7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \dots$
- **Barisan Fibonacci**, didefinisikan *rekursif*: $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n \geq 3)$, menghasilkan $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$. Muncul dari soal pembiakan kelinci oleh Fibonacci (abad ke-13).

2. Menggambar barisan

Barisan dapat digambar pada garis bilangan (titik-titik $a_1, a_2, \dots$) atau pada bidang (grafik berupa titik-titik terpisah (n, a_n)). Pada gambar kanan di bawah, $a_n = n/(n+1)$ tampak mendekati 1.



Kiri: konvergen ke 1. Tengah: berosilasi (divergen). Kanan: $n!/n^n \to 0$.

3. Limit barisan

DEFINISI (INTUITIF)

Barisan $\{a_n\}$ memiliki limit L, ditulis $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ atau $a_n \to L$, bila suku a_n dapat dibuat sedekat yang kita mau ke L dengan mengambil n cukup besar. Bila limit ada, barisan **konvergen**; bila tidak, barisan **divergen**.

DEFINISI (PRESISI, E–N)

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat N sehingga

$$n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

Artinya: seberapa sempit pun interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, semua suku mulai dari a_{N+1} berada di dalamnya. ε yang lebih kecil umumnya menuntut N yang lebih besar.

JEMBATAN DENGAN LIMIT FUNGSI

Definisi ini hampir identik dengan limit fungsi di tak hingga; satu-satunya beda adalah n bilangan bulat. Karena itu:

Teorema 3. Jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dan $f(n) = a_n$ untuk bilangan bulat n, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Ini memungkinkan penggunaan aturan l'Hôpital untuk barisan: terapkan pada fungsi $f(x)$ yang bersesuaian, lalu simpulkan untuk a_n. (Kebalikannya tidak benar: $\sin(n\pi) \to 0$ tetapi $\lim_{x\to\infty} \sin(\pi x)$ tidak ada.)

Hasil dasar: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$ untuk $r > 0$.

Limit tak hingga. $\lim a_n = \infty$ berarti untuk setiap M ada N sehingga $n > N \Rightarrow a_n > M$. Barisan itu divergen, tetapi dengan cara khusus ("divergen ke ∞").

4. Hukum limit untuk barisan

Bila $\{a_n\}, \{b_n\}$ konvergen dan c konstanta:

- $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

- $\lim ca_n = c \lim a_n, \lim c = c$
- $\lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n$
- $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$ bila $\lim b_n \neq 0$
- $\lim a_n^p = (\lim a_n)^p$ bila $p > 0$ dan $a_n > 0$

TEOREMA APIT (SQUEEZE)

Jika $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk $n \geq n_0$ dan $\lim a_n = \lim c_n = L$, maka $\lim b_n = L$.

TEOREMA 6 (NILAI MUTLAK)

Jika $\lim |a_n| = 0$ maka $\lim a_n = 0$. (Karena $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, lalu apit.)

TEOREMA 7 (FUNGSI KONTINU)

Jika $\lim a_n = L$ dan f kontinu di L, maka $\lim f(a_n) = f(L)$.

5. Contoh-contoh perhitungan

CONTOH 3 — BAGI DENGAN PANGKAT TERTINGGI

$\lim \dfrac{n}{n+1} = \lim \dfrac{1}{1+1/n} = \dfrac{1}{1+0} = 1.$ Ini mengonfirmasi tebakan dari grafik.

$\lim \dfrac{3n^2 - n}{5n^2 + 4} = \lim \dfrac{3 - 1/n}{5 + 4/n^2} = \dfrac{3}{5}.$

CONTOH 4 — LIMIT TAK HINGGA

$a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$. Bagi dengan n: $\dfrac{1}{\sqrt{10/n^2 + 1/n}}$. Penyebut menuju 0 (positif), pembilang 1, jadi $a_n \to \infty$. Barisan divergen.

CONTOH 5 — MEMAKAI L'HÔPITAL

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$. Pakai fungsi $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$. Maka $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0.$

CONTOH 6 — BARISAN YANG BEROSILASI

$a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots$ Suku bolak-balik antara -1 dan 1 tak hingga kali, tidak mendekati satu bilangan; **divergen**.

CONTOH 7 — LEWAT NILAI MUTLAK

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. $|a_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$. Dengan Teorema 6, $a_n \to 0$. Walaupun tanda berganti, magnitudonya mengecil.

CONTOH 8 — TEOREMA 7

$$\lim \sin \frac{\pi}{n} = \sin\left(\lim \frac{\pi}{n}\right) = \sin 0 = 0.$$

CONTOH 9 — BARISAN FAKTORIAL

$a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, dengan $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Tulis

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n}\right).$$

Tanda kurung berisi faktor-faktor ≤ 1, jadi $0 < a_n \leq \dfrac{1}{n}$. Dari Teorema Apit ($\frac{1}{n} \to 0$): $a_n \to 0$.

PELAJARAN PENTING

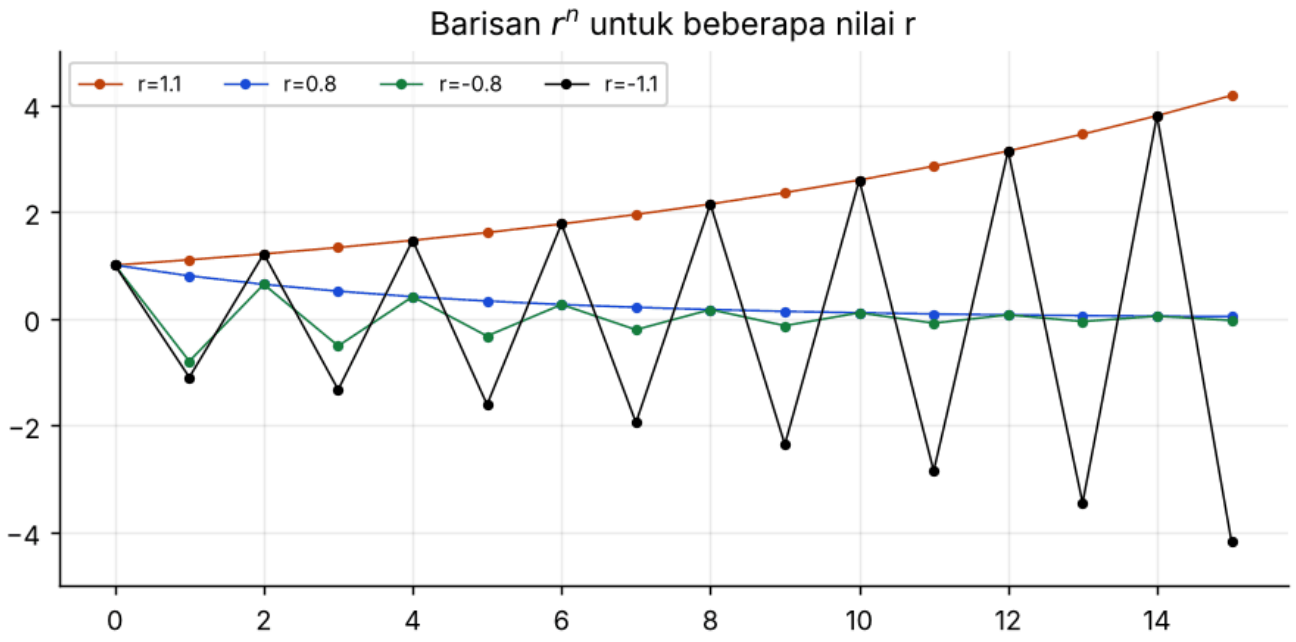
Pada tingkat n besar, n^n tumbuh jauh lebih cepat dibanding $n!$, dan $n!$ lebih cepat dibanding a^n untuk semua a, dan a^n lebih cepat dibanding pangkat n^p, yang lebih cepat dibanding $\ln n$. Hierarki: $\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$.

6. Barisan geometri r^n

CONTOH 10 — KAPAN $\{R^N\}$ KONVERGEN?

- $r > 1$: $r^n \to \infty$ (diverge).
- $r = 1$: $1, 1, 1, \cdots \to 1$.
- $0 < r < 1$: $r^n \to 0$ (karena $r^n = e^{n \ln r}$ dan $\ln r < 0$).
- $r = 0$: barisan nol, $\to 0$.
- $-1 < r < 0$: $|r|^n \to 0$, jadi $r^n \to 0$ (Teorema 6).
- $r = -1$: $-1, 1, -1, \ldots$ divergen.
- $r < -1$: $|r^n| \to \infty$ dengan tanda berganti; divergen.

Ringkasan: $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & -1 < r < 1 \\ 1 & r = 1 \end{cases}$, dan divergen untuk semua r lain. Maka $\{r^n\}$ konvergen **jika dan hanya jika** $-1 < r \leq 1$.



7. Barisan monoton dan terbatas

DEFINISI

- $\{a_n\}$ **naik** jika $a_n < a_{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$; **turun** jika $a_n > a_{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$. Naik atau turun disebut **monoton**.
- $\{a_n\}$ **terbatas di atas** jika ada M dengan $a_n \leq M$ untuk semua n; **terbatas di bawah** jika ada m dengan $m \leq a_n$; **terbatas** jika keduanya.

Contoh: $\{n\}$ terbatas di bawah (oleh 1) tetapi tidak di atas. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ terbatas karena $0 < a_n < 1$.

Membuktikan monoton

Dua cara: (i) bandingkan a_{n+1} dengan a_n lewat aljabar (selisih atau rasio); (ii) bentuk fungsi $f(x)$ dengan $f(n) = a_n$ lalu periksa f'.

CONTOH 11 — $\{\frac{3}{N+5}\}$ TURUN

Penyebut $n+6 > n+5$, jadi $\dfrac{3}{n+6} < \dfrac{3}{n+5}$: $a_{n+1} < a_n$.

CONTOH 12 — $A_N = \dfrac{N}{N^2+1}$ TURUN

Cara 1. Perlu $\dfrac{n+1}{(n+1)^2+1} < \dfrac{n}{n^2+1}$. Kalikan silang (semua penyebut positif): $(n+1)(n^2+1) < n\big((n+1)^2+1\big) \Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow 0 < n^2+n-1$, yang benar untuk $n \geq 1$.

Cara 2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ untuk $x > 1$; f turun pada $[1,\infty)$, jadi $f(n+1) < f(n)$.

8. Teorema Barisan Monoton

TEOREMA 12

Setiap barisan **monoton dan terbatas** adalah konvergen.

Bukti (untuk barisan naik)

Dasarnya adalah **Aksioma Kelengkapan** bilangan real: setiap himpunan tak kosong yang terbatas di atas punya *batas atas terkecil* (supremum). Aksioma ini menyatakan bahwa garis bilangan tidak berlubang.

Misalkan $\{a_n\}$ naik dan terbatas di atas. Himpunan $S = \{a_n : n \geq 1\}$ tak kosong dan terbatas di atas, jadi punya batas atas terkecil L. Untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ bukan batas atas S (karena L terkecil), sehingga ada N dengan $a_N > L - \varepsilon$. Karena barisan naik, untuk semua $n > N$ berlaku $a_n \geq a_N > L - \varepsilon$. Di sisi lain $a_n \leq L$. Jadi $|a_n - L| < \varepsilon$ untuk $n > N$, artinya $\lim a_n = L$. Untuk barisan turun terbatas di bawah, argumen serupa dengan batas bawah terbesar. ■

CATATAN

- Terbatas tidak cukup: $\{(-1)^n\}$ terbatas tetapi divergen.
- Monoton tidak cukup: $\{n\}$ monoton tetapi divergen.
- Teorema ini memberi *keberadaan* limit, bukan nilainya. Pada bab-bab berikut ia dipakai berulang kali untuk deret.

CONTOH 13 — BARISAN REKURSIF

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ (metode Newton untuk $\sqrt{2}$). Suku-sukunya:
$1,\ 1.5,\ 1.41\overline{6},\ 1.414215\ldots$

- **Terbatas di bawah.** Untuk $a > 0$, $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{2}{a}} = \sqrt{2}$ (AM–GM). Jadi $a_n \geq \sqrt{2}$ untuk semua $n \geq 2$.
- **Turun mulai $n = 2$.** Bila $a_n \geq \sqrt{2}$, maka $\frac{2}{a_n} \leq a_n$, sehingga $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leq a_n$.

Menurut Teorema 12 (berlaku juga bila monoton baru mulai dari suku kedua), barisan konvergen. Bila limitnya L, dari rekursi $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \sqrt{2}$ (positif karena $a_n \geq \sqrt{2}$).

Untuk mengamati konvergensi numerik dari barisan dengan rumus eksplisit, coba mode "Suku-suku barisan" pada kalkulator Python, misalnya $a(n) = n/(n+1)$ dengan n dari 1 sampai 12.

9. Ringkasan

- Barisan = fungsi dari bilangan bulat positif; limit berarti a_n mendekati L untuk n besar.
- Hukum limit, Teorema Apit, dan kekontinuan fungsi bekerja seperti pada limit fungsi.
- Untuk $\lim$ yang melibatkan $\frac{\infty}{\infty}$, pakai l'Hôpital pada fungsi padanannya.

- $\{r^n\}$ konvergen $\iff -1 < r \leq 1$.
- Monoton + terbatas $\Rightarrow$ konvergen (Teorema 12).

Materi 11.2 dst. (deret, uji konvergensi, deret pangkat, Taylor) belum ada di berkas yang Anda unggah.