Bab 10 · Persamaan Parametrik dan Koordinat Kutub

10.6 Irisan Kerucut dalam Koordinat Kutub

Pada subbab sebelumnya parabola didefinisikan lewat fokus dan direktriks, sedangkan elips dan hiperbola lewat dua fokus. Di sini ketiganya disatukan dalam satu definisi tunggal berbasis *satu fokus, satu direktriks, dan satu bilangan* (eksentrisitas). Bila fokus diletakkan di kutub, hasilnya adalah persamaan kutub yang sangat sederhana dan sangat cocok untuk gerak planet, satelit, dan komet.

1. Teorema fokus–direktriks

TEOREMA

Misalkan F titik tetap (fokus), ℓ garis tetap (direktriks), dan $e > 0$ bilangan tetap (**eksentrisitas**). Himpunan semua titik P yang memenuhi

$$\frac{|PF|}{|P\ell|} = e$$

(rasio jarak ke fokus terhadap jarak ke direktriks sama dengan e) adalah irisan kerucut:

- elips bila $e < 1$,
- parabola bila $e = 1$,
- hiperbola bila $e > 1$.

Bukti

Untuk $e = 1$, syarat itu menjadi $|PF| = |P\ell|$, yaitu definisi parabola.

Umumnya, letakkan F di titik asal dan direktriks ℓ pada garis $x = d$ $(d > 0)$, tegak lurus sumbu kutub. Untuk $P(r, \theta)$: $|PF| = r$ dan $|P\ell| = d - r\cos\theta$. Syarat $|PF| = e|P\ell|$ menjadi

$$r = e\,(d - r\cos\theta). \tag{2}$$

Kuadratkan dan konversi ke Cartesius ($r^2 = x^2 + y^2$, $r\cos\theta = x$): $x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2d^2 - 2e^2dx + e^2x^2$, yaitu

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2.$$

Bila $e \neq 1$, lengkapkan kuadrat untuk x:

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 \Big/ \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}} = 1. \tag{3}$$

Untuk $e < 1$ penyebut kedua positif: persamaan elips dengan pusat $(h, 0)$, $h = -\dfrac{e^2 d}{1-e^2}$ dan

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}, \qquad b^2 = \frac{e^2 d^2}{1-e^2}.$$

Maka $c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{e^4 d^2}{(1-e^2)^2}$, sehingga $c = \dfrac{e^2 d}{1-e^2} = |h|$: fokus (titik asal) berjarak c dari pusat — sesuai fokus elips pada Bagian 10.5. Selain itu $\dfrac{c}{a} = e$, yaitu **eksentrisitas elips** $= c/a$. Untuk $e > 1$, penyebut kedua negatif dan (3) adalah persamaan hiperbola dengan $e = c/a$ pula. ■

2. Persamaan kutub irisan kerucut

Dari (2): $r + er\cos\theta = ed$, sehingga $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$. Letak direktriks yang lain memberi variasi tanda dan fungsi:

TEOREMA (PERSAMAAN KUTUB KONIK)

Persamaan kutub berbentuk

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{atau} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$$

adalah irisan kerucut dengan eksentrisitas e dan fokus di kutub.

BENTUK	DIREKTRIKS
$R = \dfrac{ED}{1 + E\,\mathrm{COS}\,\Theta}$	$X = D$ **(DI KANAN FOKUS)**
$R = \dfrac{ED}{1 - E\,\mathrm{COS}\,\Theta}$	$X = -D$ **(DI KIRI FOKUS)**
$R = \dfrac{ED}{1 + E\,\mathrm{SIN}\,\Theta}$	$Y = D$ **(DI ATAS FOKUS)**
$R = \dfrac{ED}{1 - E\,\mathrm{SIN}\,\Theta}$	$Y = -D$ **(DI BAWAH FOKUS)**

Untuk menurunkan versi lain, ulangi derivasi tadi dengan jarak ke direktriks yang sesuai, mis. direktriks $y = d$: $|P\ell| = d - r\sin\theta$, menghasilkan $r = \dfrac{ed}{1 + e\sin\theta}$.

CONTOH 1 — PARABOLA

Fokus di titik asal, direktriks $y = -6$. Direktriks di bawah fokus: bentuk $r = \dfrac{ed}{1 - e\sin\theta}$, $e = 1,\ d = 6$: $r = \dfrac{6}{1 - \sin\theta}$.

CONTOH 2 — MENGENALI KONIK DARI PERSAMAAN

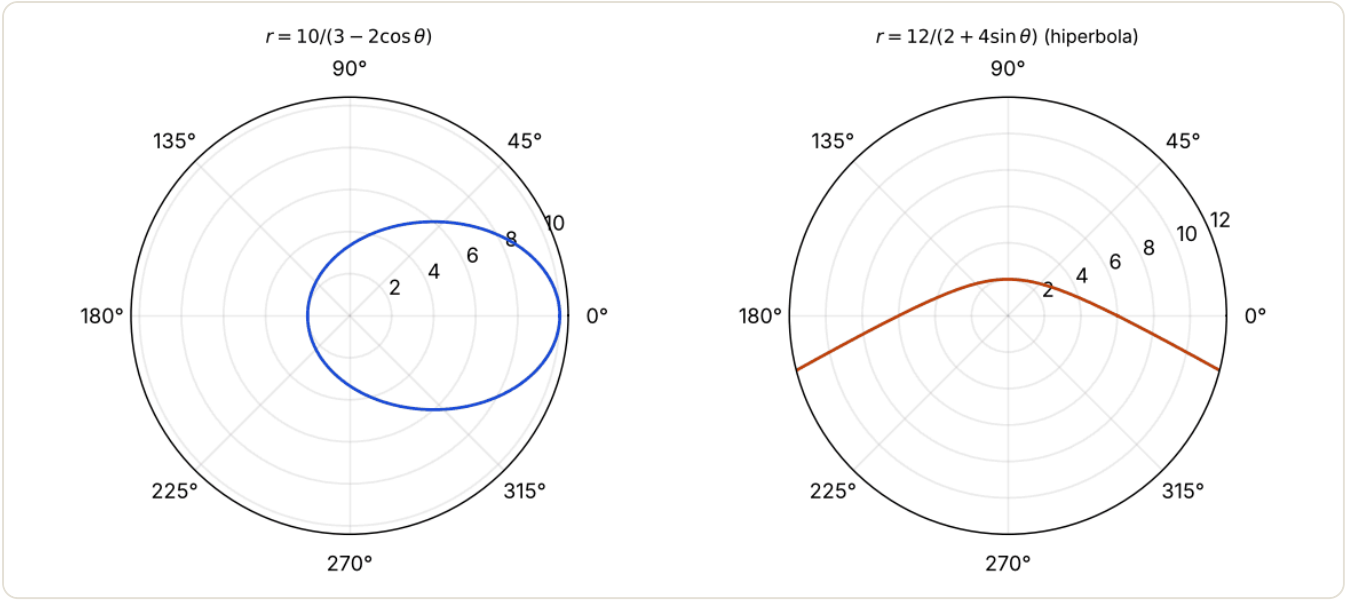
$r = \dfrac{10}{3 - 2\cos\theta}$. Bagi pembilang dan penyebut dengan 3 agar penyebut berbentuk $1 \pm e\cos\theta$:

$$r = \frac{10/3}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}.$$

Jadi $e = \frac{2}{3} < 1$: elips; $ed = \frac{10}{3} \Rightarrow d = 5$; direktriks $x = -5$ (tanda minus). Puncak: $\theta = 0 \to r = 10$, titik $(10, 0)$; $\theta = \pi \to r = 2$, titik $(-2, 0)$ Cartesius. Panjang sumbu mayor $= 10 + 2 = 12$, $a = 6$; cek $e = c/a$ dengan $c = \frac{12}{2} - 2 = 4$: $4/6 = \frac{2}{3}$ ✓.

CONTOH 3 — HIPERBOLA

$r = \dfrac{12}{2 + 4\sin\theta} = \dfrac{6}{1 + 2\sin\theta}$: $e = 2 > 1$ hiperbola, $ed = 6 \Rightarrow d = 3$, direktriks $y = 3$. Puncak muncul di $\theta = \frac{\pi}{2}$, dengan $r = \frac{6}{3} = 2$, yaitu titik $(0, 2)$; dan di $\theta = \frac{3\pi}{2}$, dengan $r = \frac{6}{1-2} = -6$, yaitu titik kutub $(-6, \frac{3\pi}{2}) = (6, \frac{\pi}{2})$, atau $(0, 6)$ di Cartesius. Jadi dua puncaknya $(0, 2)$ dan $(0, 6)$; pusat hiperbola $(0, 4)$, $a = 2$, dan fokus (titik asal) berjarak $c = 4$ dari pusat sehingga $e = c/a = 2$ ✓. Asimtot sejajar sinar $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (nilai θ yang membuat $1 + 2\sin\theta = 0$).

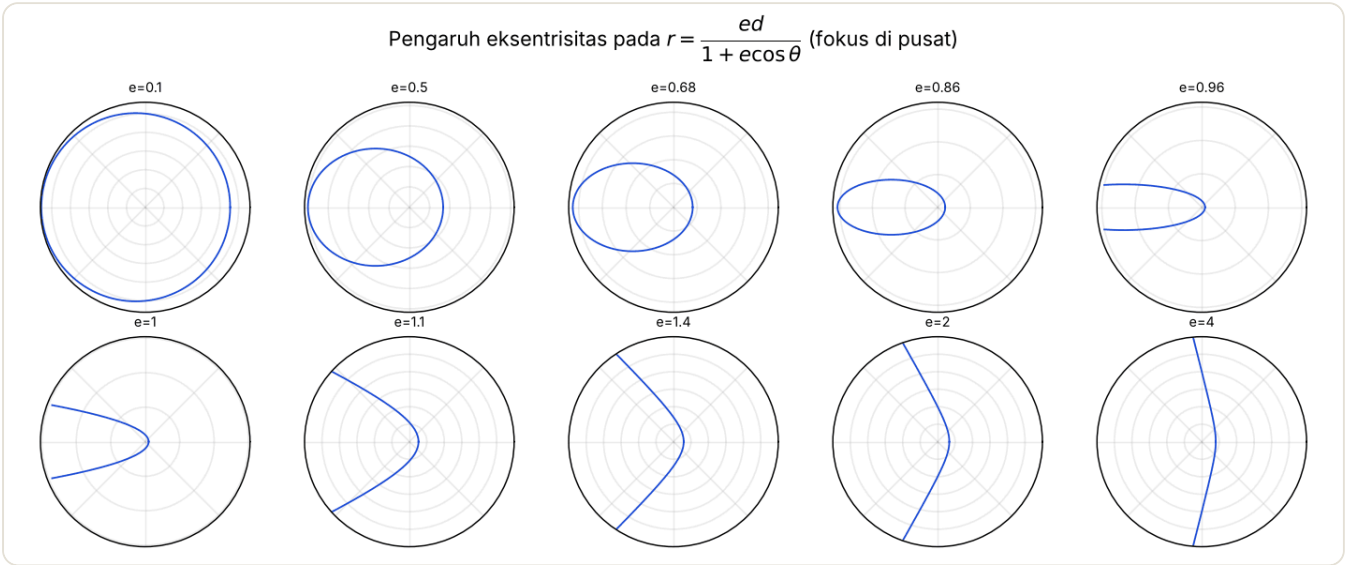


Memutar konik

Grafik $r = f(\theta - \alpha)$ adalah grafik $r = f(\theta)$ yang diputar berlawanan arah jarum jam sebesar α terhadap titik asal. Jadi elips Contoh 2 yang diputar $\frac{\pi}{4}$ adalah $r = \dfrac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$, berputar di sekitar fokus kirinya. Bandingkan dengan persamaan Cartesius yang akan sangat panjang.

Pengaruh eksentrisitas

Untuk e mendekati 0, elips hampir lingkaran. Saat $e \to 1^-$ elips makin memanjang, lalu pada $e = 1$ menjadi parabola dan untuk $e > 1$ menjadi hiperbola yang cabangnya makin "lancip" (makin lurus) seiring e membesar.



3. Hukum Kepler

TIGA HUKUM KEPLER (1609, 1619)

1. Planet mengitari Matahari dalam orbit elips dengan Matahari di salah satu fokus.
2. Garis yang menghubungkan Matahari dan planet menyapu luas yang sama dalam waktu yang sama.
3. Kuadrat periode revolusi sebanding dengan pangkat tiga panjang sumbu mayor orbit.

Hukum-hukum ini juga berlaku untuk bulan, komet, dan satelit buatan yang dipengaruhi satu gaya gravitasi pusat. Pada Bab 13.4 hukum-hukum ini akan diturunkan dari hukum Newton.

Persamaan orbit dengan a dan e

Dalam astronomi lebih mudah memakai sumbu semimayor a dan eksentrisitas e. Dari $a^2 = \dfrac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$ diperoleh $ed = a(1-e^2)$, jadi persamaan orbit (Matahari di kutub, direktriks $x = d$):

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}}$$

Titik terdekat (**perihelion**) saat $\theta = 0$: $r_{\min} = a(1-e)$. Titik terjauh (**aphelion**) saat $\theta = \pi$: $r_{\max} = a(1+e)$. (Karena $\dfrac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e)$ dan $\dfrac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e)$.)

CONTOH 4 — ORBIT BUMI

$e \approx 0.017$, panjang sumbu mayor $2a \approx 2.99 \times 10^8$ km, jadi $a \approx 1.495 \times 10^8$ km. Persamaan orbit:

$$r = \frac{1.495 \times 10^8 (1 - 0.017^2)}{1 + 0.017\cos\theta} \approx \frac{1.49 \times 10^8}{1 + 0.017\cos\theta}.$$

Perihelion: $a(1-e) \approx 1.47 \times 10^8$ km. Aphelion: $a(1+e) \approx 1.52 \times 10^8$ km. Selisihnya hanya sekitar 3%, sehingga orbit Bumi hampir lingkaran.

CONTOH 5 — JARAK APHELION MERKURIUS

Bila $e = 0.206$ dan jarak minimum 4.6×10^7 km, maka $a(1-e) = 4.6 \times 10^7 \Rightarrow a = \dfrac{4.6 \times 10^7}{0.794} \approx 5.79 \times 10^7$ km, dan jarak maksimum $a(1+e) \approx 5.79 \times 10^7 \times 1.206 \approx 6.99 \times 10^7$ km.

CONTOH 6 — EKSENTRISITAS DARI DATA JARAK

Perihelion dan aphelion Pluto: 4.43×10^9 dan 7.37×10^9 km. Dari $\dfrac{r_{\max}}{r_{\min}} = \dfrac{1+e}{1-e} = \dfrac{7.37}{4.43} \approx 1.664$: $1 + e = 1.664 - 1.664e \Rightarrow e = \dfrac{0.664}{2.664} \approx 0.249$.

4. Ringkasan

- Satu definisi menyatukan tiga konik: $|PF|/|P\ell| = e$.
- Persamaan kutub dengan fokus di kutub: $r = \dfrac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$ atau $\dfrac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$.
- Untuk orbit elips: $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$; perihelion $a(1-e)$, aphelion $a(1+e)$.
- Rotasi sebesar α: ganti θ dengan $\theta - \alpha$.

Dengan ini Bab 10 selesai. Lanjut ke Bab 11.1 — Barisan.