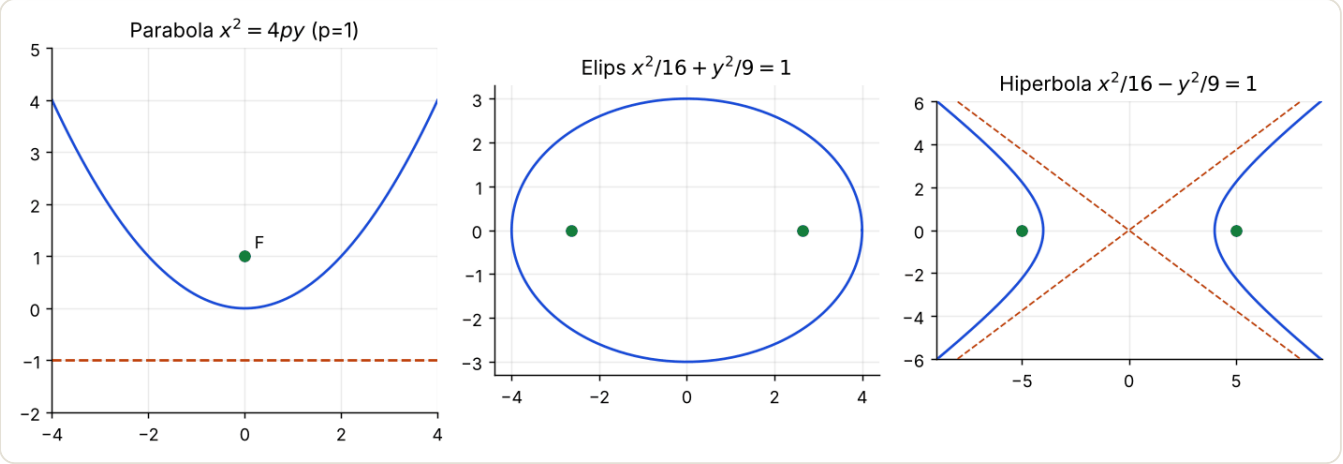
Bab 10 · Persamaan Parametrik dan Koordinat Kutub

10.5 Irisan Kerucut

Parabola, elips, dan hiperbola disebut **irisan kerucut** (*conic sections*) karena masing-masing adalah hasil perpotongan sebuah kerucut dengan sebuah bidang, dengan kemiringan bidang yang menentukan jenisnya. Dalam bagian ini kita memberi definisi geometris yang berdiri sendiri (tanpa kerucut) dan menurunkan persamaan bakunya.



Parabola, elips, dan hiperbola beserta fokusnya (titik hijau).

1. Parabola

DEFINISI

Parabola adalah himpunan titik di bidang yang berjarak sama dari sebuah titik tetap F (**fokus**) dan sebuah garis tetap (**direktriks**). Titik tengah antara fokus dan direktriks (pada garis tegak lurus direktriks melalui F) terletak pada parabola dan disebut **puncak**. Garis tegak lurus direktriks melalui fokus disebut **sumbu** parabola.

Menurunkan persamaan

Letakkan puncak di titik asal dan direktriks mendatar: fokus $F(0, p)$, direktriks $y = -p$. Titik $P(x, y)$ memenuhi $|PF| =$ jarak ke direktriks:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Kuadratkan: $x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$, sehingga

PERSAMAAN BAKU

$$x^2 = 4py \quad (\text{fokus } (0,p),\ \text{direktriks } y=-p).$$

Terbuka ke atas bila $p>0$, ke bawah bila $p<0$. Bila x dan y ditukar: $y^2=4px$, fokus $(p,0)$, direktriks $x=-p$; terbuka ke kanan bila $p>0$, ke kiri bila $p<0$.

Ekivalen dengan $y=ax^2$ dengan $a=\dfrac{1}{4p}$.

CONTOH 1

Parabola $y^2+10x=0$. Tulis $y^2=-10x$, cocokkan dengan $y^2=4px$: $4p=-10 \Rightarrow p=-\frac{5}{2}$. Fokus $(-\frac{5}{2},0)$, direktriks $x=\frac{5}{2}$, terbuka ke kiri.

Parabola dipakai pada lampu depan mobil, teleskop pantul, dan jembatan gantung. Sifat pantulnya: sinar yang sejajar sumbu dipantulkan melewati fokus (dan sebaliknya).

2. Elips

DEFINISI

Elips adalah himpunan titik P yang jumlah jaraknya ke dua titik tetap F_1, F_2 (**fokus**) konstan: $|PF_1|+|PF_2|=2a$ (dengan $2a>|F_1F_2|$).

Hukum pertama Kepler: orbit planet berupa elips dengan Matahari di salah satu fokus.

Menurunkan persamaan

Letakkan fokus di $(\pm c,0)$. Syaratnya $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Pindahkan satu akar dan kuadratkan:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \;\Rightarrow\; x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2}$$

Sederhanakan: $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$. Kuadratkan lagi: $a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$, sehingga $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Dari segitiga F_1F_2P kita tahu $2c<2a$, jadi $a^2-c^2>0$; definisikan $b^2=a^2-c^2$. Pembagian dengan a^2b^2 memberi

PERSAMAAN BAKU ELIPS

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a\geq b>0, \quad c^2=a^2-b^2.$$

Fokus $(\pm c,0)$, titik puncak $(\pm a,0)$, sumbu mayor panjang $2a$ (sepanjang sumbu x), sumbu minor panjang $2b$ (titik $(0,\pm b)$). Bila fokus pada sumbu y: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, fokus $(0,\pm c)$, puncak $(0,\pm a)$.

Bila $c=0$ (dua fokus berimpit), $a=b$ dan elips menjadi lingkaran jari-jari a.

CONTOH 2 — DARI PERSAMAAN KE ELEMEN ELIPS

$9x^2+16y^2=144$. Bagi dengan 144: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $a=4,\ b=3$. $c^2=16-9=7$, fokus $(\pm\sqrt{7},0)$, puncak $(\pm 4,0)$, titik potong sumbu y: $(0,\pm 3)$.

CONTOH 3 — DARI ELEMEN KE PERSAMAAN

Fokus $(0,\pm 2)$, puncak $(0,\pm 3)$: fokus di sumbu y, $c=2,\ a=3, b^2=9-4=5$. Persamaan $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$, atau $9x^2+5y^2=45$.

Sifat pantul: cahaya atau bunyi dari satu fokus dipantulkan ke fokus lain. Prinsip ini dipakai pada litotripsi (penghancur batu ginjal dengan gelombang kejut) dan pada *whispering gallery*.

3. Hiperbola

DEFINISI

Hiperbola adalah himpunan titik P yang *selisih* jaraknya ke dua fokus F_1, F_2 konstan: $\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a$.

Turunannya paralel dengan elips (dengan selisih menggantikan jumlah, dan $c>a$): dengan fokus $(\pm c,0)$ dan $b^2=c^2-a^2$,

PERSAMAAN BAKU HIPERBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad c^2 = a^2 + b^2.$$

Titik puncak $(\pm a, 0)$, fokus $(\pm c, 0)$, asimtot $y = \pm \dfrac{b}{a} x$. Tidak ada titik potong sumbu y (karena $-y^2/b^2 = 1$ mustahil). Hiperbola memiliki dua cabang, $x \geq a$ dan $x \leq -a$. Bila fokus pada sumbu y: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, fokus $(0, \pm c)$, asimtot $y = \pm \dfrac{a}{b} x$.

Cara menggambar: gambar dulu persegi panjang dengan sisi $2a$ dan $2b$ berpusat di titik pusat, tarik diagonalnya sebagai asimtot, lalu lukis cabang yang bersinggungan dengan puncak dan mendekati asimtot.

CONTOH 4

$9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. $a = 4,\ b = 3,\ c = 5$. Fokus $(\pm 5, 0)$, puncak $(\pm 4, 0)$, asimtot $y = \pm \frac{3}{4} x$.

CONTOH 5

Puncak $(0, \pm 1)$, asimtot $y = \pm 2x$. Fokus pada sumbu y, $a = 1$; asimtot $y = \pm \frac{a}{b} x \Rightarrow \frac{1}{b} = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. $c^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, fokus $(0, \pm \frac{\sqrt{5}}{2})$; persamaan $y^2 - 4x^2 = 1$.

Hiperbola muncul dalam hukum Boyle, hukum Ohm, kurva penawaran dan permintaan, dan sistem navigasi LORAN (stasiun radio di titik A, B; selisih waktu tiba sinyal $\Rightarrow$ selisih jarak $\Rightarrow$ kapal berada pada satu cabang hiperbola dengan fokus A, B).

4. Irisan kerucut yang digeser

Untuk menggeser pusat/puncak ke (h, k), ganti x dengan $x - h$ dan y dengan $y - k$ pada semua persamaan baku (lihat Lampiran C buku).

CONTOH 6 — ELIPS DARI FOKUS DAN PUNCAK

Fokus $(-1, 2), (5, 2)$, puncak $(-2, 2), (6, 2)$. Pusat adalah titik tengah: $(2, 2)$. Panjang sumbu mayor $= 8 \Rightarrow a = 4$; jarak fokus $= 6 \Rightarrow c = 3$; $b^2 = 16 - 9 = 7$. Persamaan:

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1.$$

CONTOH 7 — MELENGKAPKAN KUADRAT

$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$. Kelompokkan: $9(x^2 - 8x) - 4(y^2 - 2y) = -176$. Lengkapkan kuadrat: $9(x-4)^2 - 4(y-1)^2 = -176 + 144 - 4 = -36$. Bagi dengan -36 :

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1.$$

Hiperbola dengan fokus pada garis vertikal $x = 4$: $a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{13}$, pusat $(4, 1)$; puncak $(4, 4), (4, -2)$; fokus $(4, 1 \pm \sqrt{13})$; asimtot $y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x - 4)$.

5. Pendekatan numerik untuk keliling elips

Keliling elips $x = a\sin\theta,\ y = b\cos\theta$ adalah integral eliptik $L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,d\theta$ dengan $e = c/a$ — tidak punya antiturunan elementer. Gunakan integral numerik (Simpson). Dengan kalkulator Python: panjang kurva parametrik $x = 3\cos(t),\ y = 2\sin(t)$, 0 sampai $2 * pi$, memberi ≈ 15.865.

6. Ringkasan

	Parabola	Elips	Hiperbola
Definisi	$\lvert PF\rvert = d(P, \ell)$	$\lvert PF_1\rvert + \lvert PF_2\rvert = 2a$	$\lvert\lvert PF_1\rvert - \lvert PF_2\rvert\rvert = 2a$
Persamaan baku	$x^2 = 4py$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hubungan	—	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
Eksentrisitas e	1	$c/a < 1$	$c/a > 1$