Bab 10 · Persamaan Parametrik dan Koordinat Kutub

10.4 Luas dan Panjang Kurva dalam Koordinat Kutub

1. Luas daerah kutub

Dasar dari semuanya adalah luas *juring* (sektor) lingkaran. Juring berjari-jari r dengan sudut pusat θ (radian) memiliki luas

$$A = \tfrac{1}{2} r^2 \theta, \tag{1}$$

karena luasnya sebanding dengan sudut pusat: $\dfrac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2$.

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah daerah yang dibatasi kurva $r = f(\theta)$ dan dua sinar $\theta = a$ dan $\theta = b$, dengan f kontinu dan positif serta $0 < b - a \le 2\pi$. Bagi $[a, b]$ menjadi n bagian sama lebar $\Delta\theta$. Sinar-sinar pembagi memecah $\mathcal{R}$ menjadi n irisan tipis. Irisan ke-i dihampiri juring berjari-jari $f(\theta_i^*)$ dan sudut $\Delta\theta$, maka luasnya $\approx \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta$. Menjumlahkan lalu mengambil limit $n \to \infty$ menghasilkan integral:

RUMUS LUAS

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}\,[f(\theta)]^2\,d\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}\,r^2\,d\theta.$$

Bayangkan sinar yang berputar dari $\theta = a$ ke $\theta = b$ menyapu daerah itu.

CONTOH 1 — SATU DAUN MAWAR $R = \cos 2\Theta$

Daun di sisi kanan disapu sinar dari $\theta = -\frac{\pi}{4}$ sampai $\frac{\pi}{4}$ (karena $r \ge 0$ di sana dan $r = 0$ di kedua ujungnya). Dengan simetri terhadap sumbu x:

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\cos^2 2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\,d\theta = \left[\tfrac{\theta}{2} + \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}.$$

Karena keempat daun kongruen, luas seluruh mawar $= 4 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Kerjakan juga dengan alat: kalkulator Python, pilih *Luas daerah kutub*, $r(t) = \cos(2 * t)$, batas $-pi/4$ sampai $pi/4$, hasil $\approx 0.3927 = \pi/8$.

CONTOH 2 — LUAS KARDIOID UTUH

$r = 1 + \sin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta - 2\cos\theta + \tfrac{\theta}{2} - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{2}\cdot 3\pi = \tfrac{3}{2}$$

2. Luas di antara dua kurva kutub

Bila $\mathcal{R}$ dibatasi kurva dalam $r = g(\theta)$ dan kurva luar $r = f(\theta)$ untuk $a \le \theta \le b$ (dengan $f \ge g \ge 0$), luasnya adalah luas daerah luar dikurangi luas daerah dalam:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_a^b \left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta.$$

CONTOH 3 — DI DALAM LINGKARAN, DI LUAR KARDIOID

Cari luas daerah di dalam $r = 3\sin\theta$ dan di luar $r = 1 + \sin\theta$.

Langkah 1: titik potong. $3\sin\theta = 1 + \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}$. Itulah batas a, b.

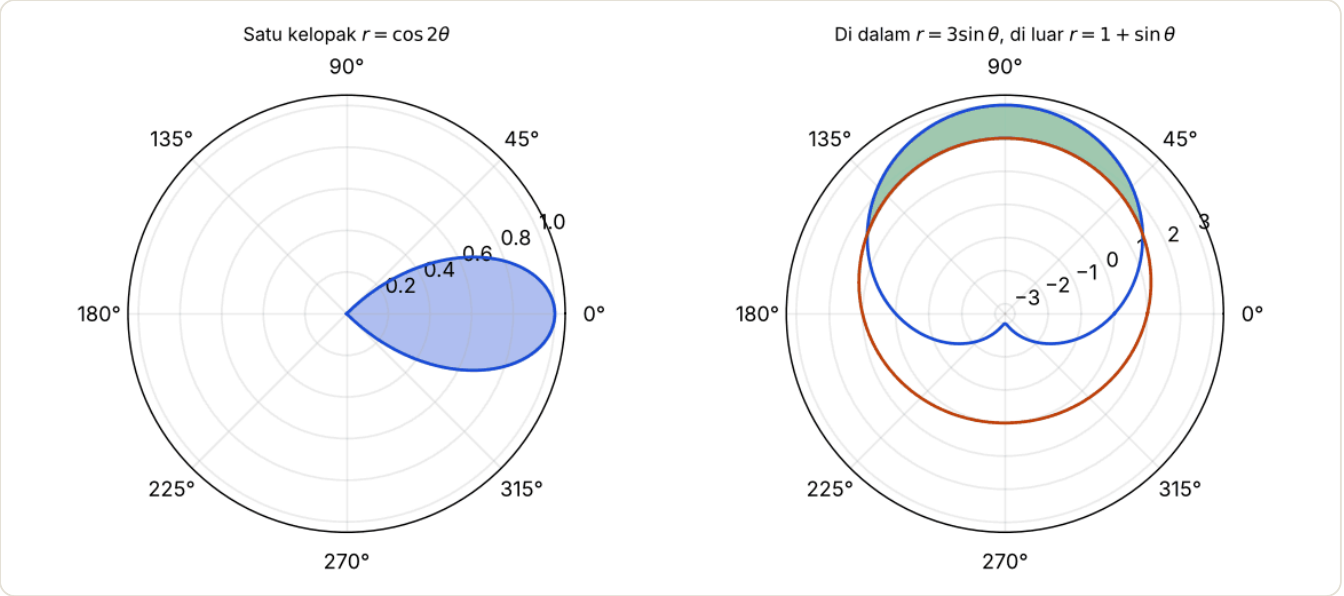
Langkah 2: integral. Pada $\tfrac{\pi}{6} \le \theta \le \tfrac{5\pi}{6}$, lingkaran adalah kurva luar. Karena daerah simetris terhadap sumbu y ($\theta = \pi/2$), hitung separuh lalu gandakan:

$$A = 2\cdot\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(9\sin^2\theta - (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\right) d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8\sin^2\theta - 2\sin\theta - 1)\, d$$

Gunakan $\sin^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$: integran menjadi $3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta$, sehingga

$$A = \left[3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \left(\tfrac{3\pi}{2} + 0\right) - \left(\tfrac{\pi}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3}\right) = \pi.$$

(Perhatikan: di $\theta = \pi/6$, $-2\sin\tfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ dan $2\cos\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, sehingga saling menghapus.) Luas $= \pi$.



Kiri: satu daun $r = \cos 2\theta$. Kanan: daerah di dalam lingkaran dan di luar kardioid pada Contoh 3.

PERINGATAN: TITIK POTONG KURVA KUTUB

Karena satu titik memiliki banyak representasi, menyelesaikan $f(\theta) = g(\theta)$ *tidak* selalu menemukan semua titik potong. Pada Contoh 3, lingkaran dan kardioid memotong di $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ dan $\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ *dan juga di kutub*. Kutub tidak ditemukan dari penyelesaian persamaan karena kutub bukan (r, θ) yang sama untuk kedua kurva: lingkaran mencapai kutub di $\theta = 0, \pi$ ($3\sin\theta = 0$), sedangkan kardioid mencapainya di $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Pikirkan dua titik yang bergerak sepanjang kurva masing-masing saat θ naik: mereka tidak *bertabrakan* di kutub karena tiba pada waktu berbeda, tetapi kurvanya tetap berpotongan di sana.

Saran: selalu gambar kedua kurva (dengan komputer bila perlu), dan periksa kutub secara terpisah.

CONTOH 4 — SEMUA TITIK POTONG $R = \cos 2\Theta$ DAN $R = \frac{1}{2}$

Dari $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ diperoleh $2\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, jadi $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$: empat titik. Dari gambar ada empat titik lagi, yaitu $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$. Titik-titik ini ditemukan lewat simetri, atau dengan menulis lingkaran sebagai $r = -\frac{1}{2}$ dan menyelesaikan $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$. Total delapan titik potong.

3. Panjang kurva kutub

Jadikan θ parameter: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, r = f(\theta)$. Turunkan:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

Kuadratkan dan jumlahkan; suku silang $\mp 2r\,\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\theta$ saling menghapus dan $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2.$$

Dengan rumus panjang kurva parametrik (Bagian 10.2) kita dapatkan

RUMUS PANJANG

$$L=\int_a^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

CONTOH 5 — KELILING KARDIOID

$r=1+\sin\theta$, $\dfrac{dr}{d\theta}=\cos\theta$:

$$r^2+r'^2=1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta=2+2\sin\theta.$$

Integral $\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\sin\theta}\,d\theta$ dapat dihitung dengan mengalikan dan membagi dengan $\sqrt{2-2\sin\theta}$, atau dengan identitas setengah-sudut ($1+\sin\theta=2\sin^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})$). Hasilnya $L=8$. Periksa numerik di kalkulator Python (hasil ≈ 7.9999999).

CONTOH 6 — SPIRAL $R=\Theta$

Di sini $r=\theta$ dan $dr/d\theta=1$, jadi

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta=\Big[\tfrac{\theta}{2}\sqrt{\theta^2+1}+\tfrac{1}{2}\ln\big(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\big)\Big]_0^{\pi}=\tfrac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+1}+\tfrac{1}{2}\ln\big(\pi$$

(Antiturunan $\int\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$ diperoleh dengan substitusi trigonometri $\theta=\tan u$.)

4. Luas permukaan benda putar (kurva kutub)

Jika kurva $r=f(\theta)$, $a\le\theta\le b$, diputar mengelilingi sumbu kutub (sumbu x), maka dengan $y=r\sin\theta$ dan elemen busur kutub di atas,

$$S=\int_a^b 2\pi\, r\sin\theta\,\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

Untuk diputar mengelilingi sumbu y, ganti $\sin\theta$ dengan $\cos\theta$ (karena $x=r\cos\theta$).

5. Ringkasan

Besaran	Rumus
Luas daerah sampai kutub	$\frac{1}{2}\int_a^b r^2\,d\theta$
Luas antara dua kurva	$\frac{1}{2}\int_a^b (r_{luar}^2 - r_{dalam}^2)\,d\theta$
Panjang kurva	$\int_a^b \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$
Luas permukaan putar (sumbu kutub)	$\int_a^b 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$