Bab 10 · Persamaan Parametrik dan Koordinat Kutub

10.3 Koordinat Kutub

1. Sistem koordinat kutub

Koordinat Cartesius menyatakan titik lewat dua jarak berarah dari dua sumbu tegak lurus. Newton memperkenalkan cara lain yang jauh lebih alami untuk persoalan berpusat: lingkaran, spiral, orbit planet, gelombang yang merambat keluar dari sumber.

DEFINISI

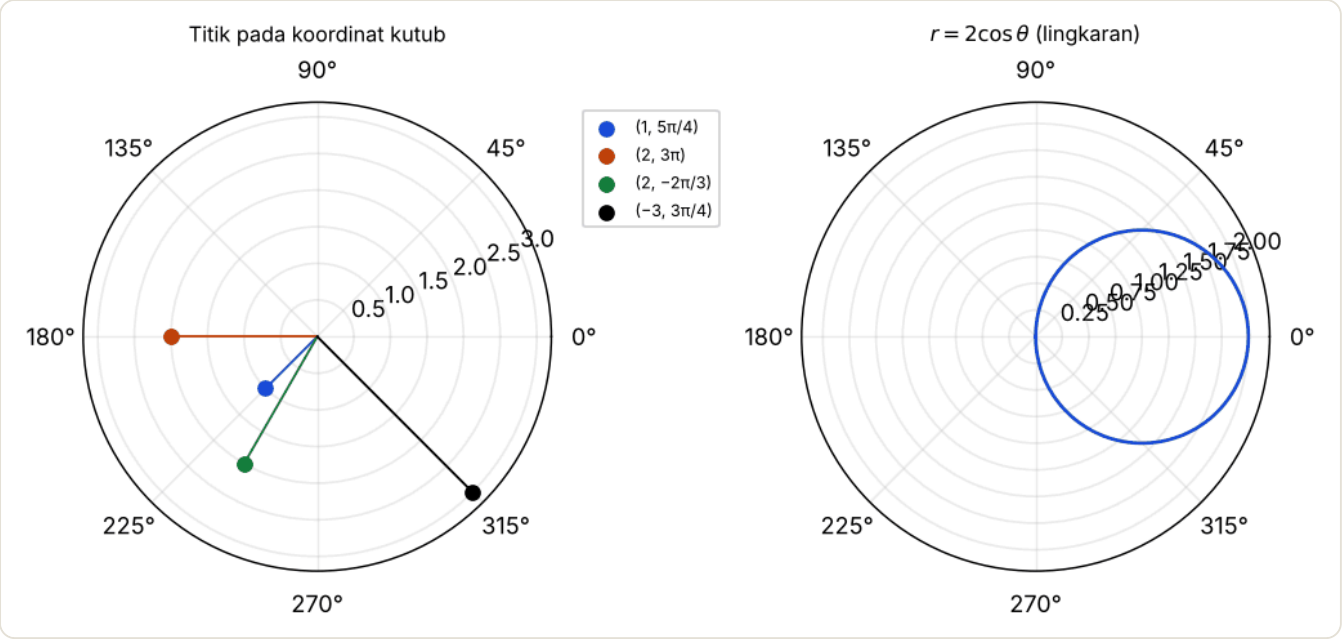
Pilih sebuah titik O (disebut **kutub** atau titik asal) dan sebuah sinar dari O (disebut **sumbu kutub**, biasanya digambar horizontal ke kanan, sehingga berimpit dengan sumbu x positif). Untuk titik P lain, misalkan r = jarak OP dan θ = sudut dari sumbu kutub ke garis OP (positif bila berlawanan arah jarum jam, negatif bila searah). Pasangan (r, θ) disebut **koordinat kutub** P. Kutub sendiri adalah $(0, \theta)$ untuk sembarang θ.

Memperluas ke r negatif

Kita sepakati bahwa $(-r, \theta)$ adalah titik yang terletak pada garis lurus yang sama melalui O dengan (r, θ), dengan jarak yang sama dari O, tetapi di sisi *berlawanan* dari kutub. Dengan kata lain, $(-r, \theta)$ dan $(r, \theta + \pi)$ adalah titik yang sama. Jadi $r < 0$ berarti "mundur" sejauh $|r|$ dari arah θ.

CONTOH 1 — MENGGAMBAR TITIK

(a) $(1, \frac{5\pi}{4})$: sudut di kuadran III, jarak 1. (b) $(2, 3\pi)$: 3π = satu setengah putaran, tepat arah negatif sumbu x; jarak 2 sehingga di $(-2, 0)$ Cartesius. (c) $(2, -\frac{2\pi}{3})$: berputar 120° searah jarum jam (kuadran III). (d) $(-3, \frac{3\pi}{4})$: sudut 135° ada di kuadran II, tetapi r negatif sehingga titik berada di sisi berlawanan, yaitu kuadran IV.



Keempat titik pada Contoh 1 (kiri), dan lingkaran $r = 2\cos\theta$ (kanan).

Satu titik, banyak representasi

Berbeda dengan Cartesius, setiap titik punya tak hingga banyak koordinat kutub. Titik (r, θ) juga dinyatakan oleh

$$(r, \theta + 2n\pi) \quad \text{dan} \quad (-r, \theta + (2n+1)\pi), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Contoh: $(1, \frac{5\pi}{4}) = (1, -\frac{3\pi}{4}) = (1, \frac{13\pi}{4}) = (-1, \frac{\pi}{4})$. Konsekuensi: mencari titik potong dua kurva kutub memerlukan kehati-hatian ekstra (Bagian 10.4).

2. Hubungan dengan koordinat Cartesius

Letakkan kutub di titik asal dan sumbu kutub pada sumbu x positif. Dari segitiga siku-siku pada gambar standar:

RUMUS KONVERSI

$$(1) \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad\qquad (2) \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Persamaan (1) berlaku untuk semua r dan θ (termasuk $r < 0$).

CONTOH 2 — KUTUB KE CARTESIUS

$(2, \frac{\pi}{3})$: $x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$, $y = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Jadi $(1, \sqrt{3})$.

CONTOH 3 — CARTESIUS KE KUTUB

Titik $(1, -1)$: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Dari $\tan\theta = -1$ ada dua sudut dalam $[0, 2\pi)$: $\frac{3\pi}{4}$ dan $\frac{7\pi}{4}$. Titik berada di kuadran IV, sehingga $\theta = \frac{7\pi}{4}$ (atau $-\frac{\pi}{4}$). Satu jawaban: $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$; jawaban lain: $(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.

CATATAN

Persamaan $\tan\theta = y/x$ tidak menentukan θ secara tunggal (nilai tangen berulang tiap π). Periksa kuadran yang benar, jangan hanya memakai $\arctan(y/x)$ mentah. Khusus $x = 0$, tangen tak terdefinisi: $\theta = \pm\pi/2$ sesuai tanda y.

3. Kurva kutub

Grafik persamaan kutub $r = f(\theta)$ (atau lebih umum $F(r, \theta) = 0$) terdiri atas semua titik yang *memiliki sedikitnya satu* representasi kutub yang memenuhi persamaan itu.

CONTOH 4 — $R = 2$ DAN $\Theta = 1$

$r = 2$: semua titik berjarak 2 dari kutub, yaitu lingkaran berpusat di O berjari-jari 2. Umumnya $r = a$ adalah lingkaran jari-jari $|a|$.
$\theta = 1$ (radian): semua titik dengan sudut 1, yaitu garis lurus melalui O yang membentuk sudut 1 radian dengan sumbu kutub; titik dengan $r > 0$ berada di kuadran I, yang $r < 0$ di kuadran III.

CONTOH 5 — $R = 2\,\mathrm{COS}\,\Theta$

Dengan tabel: $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ memberi $r = 2, \sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, 0$; bila θ dilanjutkan ke π, r negatif dan titiknya jatuh kembali pada lingkaran yang sama, jadi cukup $0 \le \theta \le \pi$.
Dengan konversi: kalikan kedua ruas dengan r: $r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$, lingkaran berpusat $(1, 0)$ berjari-jari 1.
Geometri: bila P pada lingkaran dan $Q = (2, 0)$ ujung diameter, sudut OPQ adalah sudut siku-siku (sudut keliling pada setengah lingkaran), sehingga $OP = OQ\cos\theta = 2\cos\theta$.

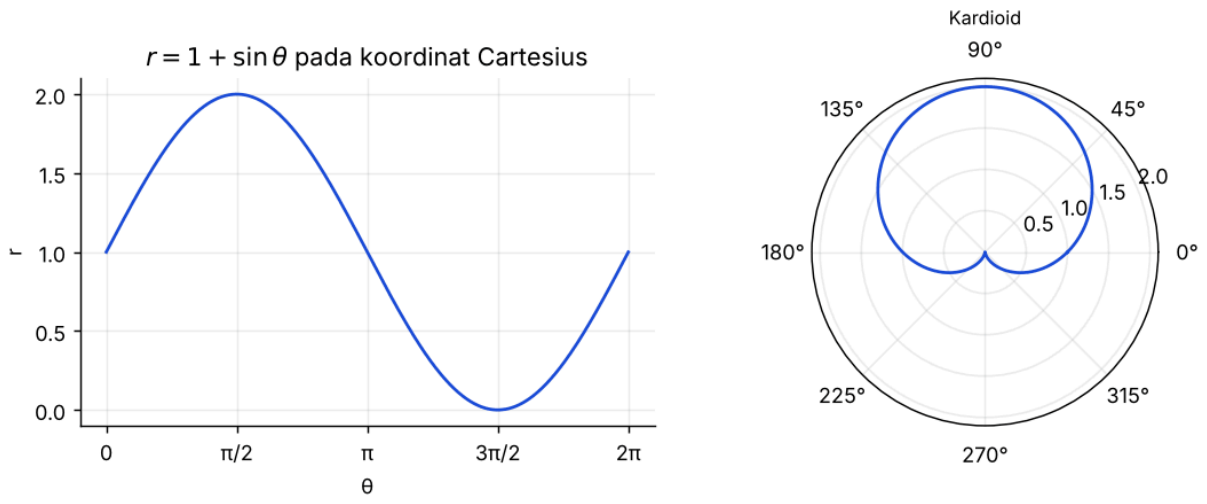
Membuat sketsa: baca dulu dari grafik Cartesius

Cara paling dapat diandalkan untuk kurva kutub tanpa komputer: gambar r terhadap θ pada koordinat Cartesius biasa, lalu "baca" bagaimana r naik/turun saat θ bergerak, dan terjemahkan menjadi gerak sepanjang sinar yang berputar.

CONTOH 6 — KARDIOID $R = 1 + \text{SIN}\,\Theta$

- $\theta : 0 \to \pi/2$: r naik dari 1 ke 2.
- $\theta : \pi/2 \to \pi$: r turun dari 2 ke 1.
- $\theta : \pi \to 3\pi/2$: r turun dari 1 ke 0 (kurva kembali ke kutub dengan "ujung runcing").
- $\theta : 3\pi/2 \to 2\pi$: r naik dari 0 ke 1.

Bentuknya seperti hati (*kardia* = jantung), makanya disebut kardioid.



Kiri: r sebagai fungsi θ; kanan: kurva kutubnya.

CONTOH 7 — MAWAR BERDAUN EMPAT $R = \text{COS}\,2\Theta$

Pada $0 \le \theta \le \pi/4$, r turun dari 1 ke 0 (daun pertama di kuadran I). Pada $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$, r negatif dari 0 ke -1: titik berada di sisi berlawanan (kuadran III), sehingga daun kedua terbentuk di kuadran III, bukan II. Kelanjutan analog membentuk empat daun. Secara umum $r = \cos n\theta$ dan $r = \sin n\theta$ menghasilkan mawar berdaun n bila n ganjil dan $2n$ bila n genap.

4. Simetri

Bila persamaan tidak berubah jika…	maka kurva simetris terhadap…
$\theta \to -\theta$	sumbu kutub (sumbu x)
$r \to -r$, atau $\theta \to \theta + \pi$	kutub (putaran $180°$)
$\theta \to \pi - \theta$	garis $\theta = \pi/2$ (sumbu y)

Contoh: $r = 2\cos\theta$ dan $r = \cos 2\theta$ simetris terhadap sumbu kutub; $r = 1 + \sin\theta$ dan $r = \cos 2\theta$ simetris terhadap sumbu y (karena $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$); mawar $r = \cos 2\theta$ juga simetris terhadap kutub. Dengan simetri, cukup gambar sebagian lalu cerminkan.

5. Garis singgung kurva kutub

Untuk $r = f(\theta)$, jadikan θ parameter: $x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\sin\theta$. Aturan perkalian dan rumus parametrik memberi

RUMUS (3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}.$$

- Tangen horizontal: pembilang $= 0$ (penyebut $\neq 0$).
- Tangen vertikal: penyebut $= 0$ (pembilang $\neq 0$).
- **Di kutub** ($r = 0$) rumus menjadi $dy/dx = \tan\theta$ bila $dr/d\theta \neq 0$: garis singgung di kutub adalah garis $\theta = \theta_0$ di mana $r(\theta_0) = 0$. Misalnya pada $r = \cos 2\theta$, $r = 0$ di $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, jadi garis $y = x$ dan $y = -x$ menyinggung kurva di titik asal.

CONTOH 8 — KARDIOID $R = 1 + \mathrm{SIN}\,\Theta$

$dr/d\theta = \cos\theta$. Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{1 - 2\sin^2\theta - \sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin}$$

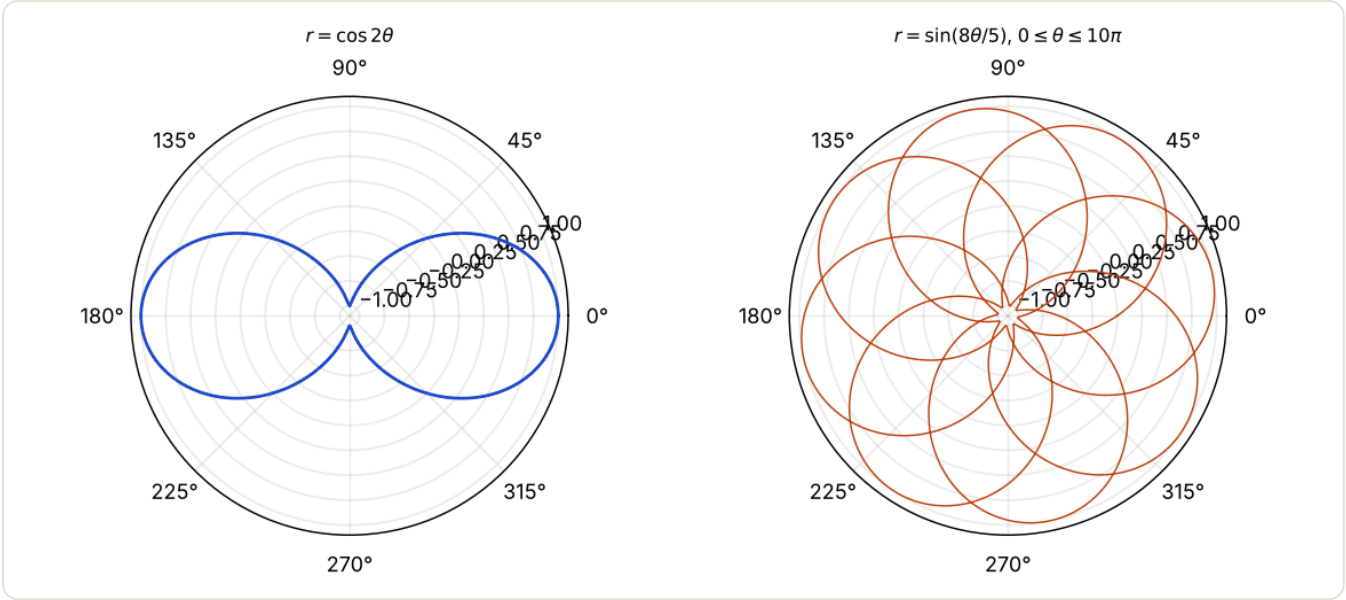
(a) Di $\theta = \pi/3$: $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pembilang $= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$, penyebut $= (1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1-\sqrt{3})$. Setelah disederhanakan kemiringannya adalah -1 (perhitungannya: pembilang $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, penyebut $\frac{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{2} = \frac{2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, rasio $= -1$).
(b) Horizontal: pembilang nol, $\cos\theta = 0$ atau $1 + 2\sin\theta = 0$, yaitu $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; namun di $\theta = \frac{3\pi}{2}$ penyebut juga nol (faktor $1+\sin\theta$), jadi nilai itu dikeluarkan dan ditinjau terpisah. Titik horizontal yang valid: $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$, yaitu $(2, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6})$, $(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6})$. Vertikal: penyebut nol dari faktor $1 - 2\sin\theta$, yaitu $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, titik $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6})$ dan $(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6})$. Di $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (kutub) pembilang dan penyebut keduanya nol; dengan l'Hôpital limit $dy/dx \to \infty$, jadi ada garis singgung vertikal di kutub.

6. Menggambar dengan komputer

Bila alat tidak punya perintah kutub langsung, ubah ke parametrik: $x = f(t)\cos t,\ y = f(t)\sin t$. Tentukan dulu rentang t agar seluruh kurva tergambar.

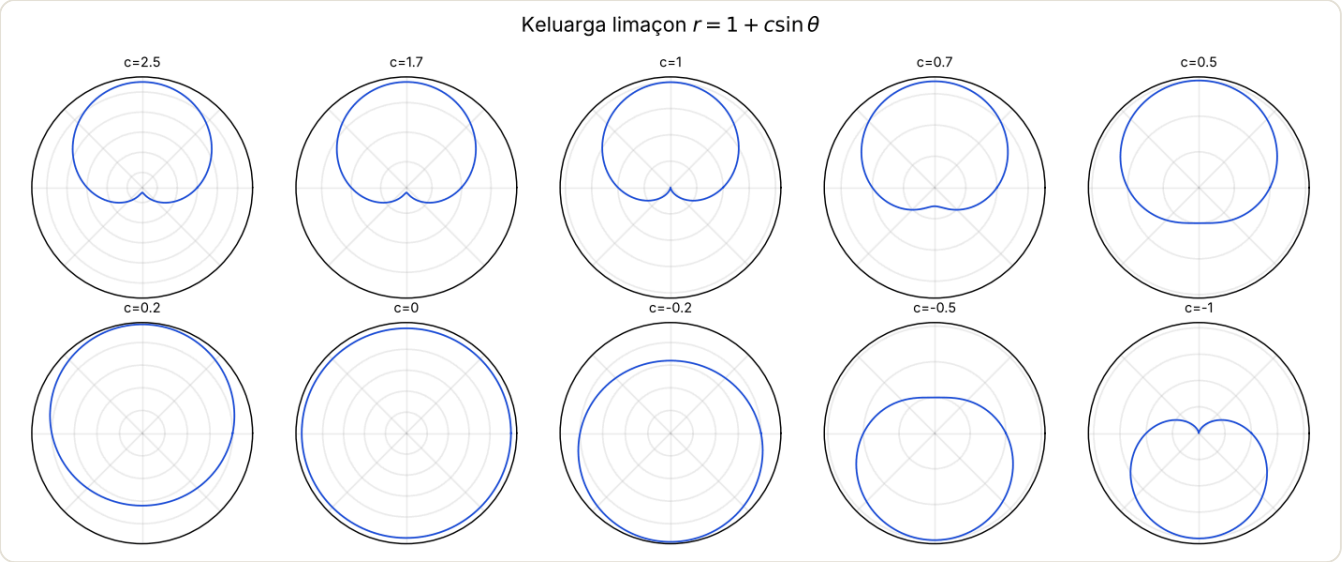
CONTOH 9 — $R = \mathrm{SIN}(8\Theta/5)$

Setelah n putaran penuh ($\theta \to \theta + 2n\pi$), nilai r menjadi $\sin\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right)$. Kurva mulai mengulang jika pergeseran sudut itu kelipatan 2π, yaitu $\frac{16n\pi}{5} = 2\pi k$, atau $\frac{8n}{5} = k$ bilangan bulat. Nilai n positif terkecil yang memenuhi adalah $n = 5$, sehingga cukup menggambar $0 \le \theta \le 10\pi$. Hasilnya mawar dengan 16 daun.



Keluarga limaçon $r = 1 + c\sin\theta$

- $c > 1$: ada simpul dalam yang mengecil saat $c \downarrow 1$.
- $c = 1$: kardioid.
- $\frac{1}{2} < c < 1$: ujung runcing kardioid melembut menjadi "lekukan" (dimple) di dekat kutub, yaitu di bagian bawah untuk $r = 1 + c\sin\theta$.
- $0 < c \le \frac{1}{2}$: bentuk oval yang makin bulat saat $c \to 0$.
- $c = 0$: lingkaran $r = 1$. Untuk $c < 0$ bentuknya adalah pencerminan terhadap sumbu horizontal.



Kata "limaçon" berarti siput (Prancis). Lintasan Mars dilihat dari Bumi dimodelkan oleh limaçon berloop.

Batas $c = \frac{1}{2}$ antara "berlekuk" dan "oval" dapat dibuktikan. Di titik bawah $\theta = \frac{3\pi}{2}$ kita punya $r = 1 - c$, $r' = 0$, $r'' = c$. Rumus kelengkungan kurva kutub (pembilang: $r^2 + 2r'^2 - rr''$) memberi pembilang $(1-c)^2 - (1-c)c = (1-c)(1-2c)$, yang berganti tanda tepat di $c = \frac{1}{2}$ (untuk $0 < c < 1$). Artinya di bawah $c = \frac{1}{2}$ kurva cembung di titik itu (oval), di atasnya cekung (lekukan).