Bab 10 · Persamaan Parametrik dan Koordinat Kutub

10.2 Kalkulus pada Kurva Parametrik

Setelah kita bisa menyatakan kurva secara parametrik, pertanyaan alaminya: bagaimana menghitung garis singgung, luas, panjang kurva, dan luas permukaan putar tanpa terlebih dahulu menghilangkan parameter? Jawabannya adalah menurunkan semua rumus yang sudah kita kenal ke dalam bahasa parameter t.

1. Garis singgung

Misalkan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ keduanya terdiferensialkan, dan y juga terdiferensialkan sebagai fungsi x. Aturan rantai memberi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Jika $dx/dt \neq 0$, kita selesaikan untuk dy/dx:

RUMUS (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{bila } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Interpretasi fisis: dx/dt dan dy/dt adalah kecepatan horizontal dan vertikal partikel. Kemiringan garis singgung adalah rasio keduanya. Dari sini:

- **Tangen horizontal** terjadi bila $dy/dt = 0$ *dan* $dx/dt \neq 0$.
- **Tangen vertikal** terjadi bila $dx/dt = 0$ *dan* $dy/dt \neq 0$.
- Bila keduanya nol, belum bisa disimpulkan apa-apa; gunakan limit (misalnya aturan l'Hôpital) seperti pada sikloid di bawah.

Turunan kedua

Kecekungan ditentukan oleh d^2y/dx^2. Terapkan Rumus (1) pada fungsi dy/dx (bukan pada y):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

JEBAKAN YANG SANGAT SERING TERJADI

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}.$$

Anda harus mendiferensialkan *hasil bagi* $\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ terhadap t, baru dibagi lagi dengan dx/dt.

CONTOH 1 — KURVA YANG MEMOTONG DIRINYA SENDIRI

Kurva C: $x = t^2,\ y = t^3 - 3t$.

(a) Dua garis singgung di (3, 0). $y = t(t^2 - 3) = 0$ bila $t = 0$ atau $t = \pm\sqrt{3}$. Titik $(3, 0)$ memenuhi $x = t^2 = 3$, yaitu $t = \pm\sqrt{3}$: kurva melewati titik ini dua kali (memotong dirinya). Hitung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}.$$

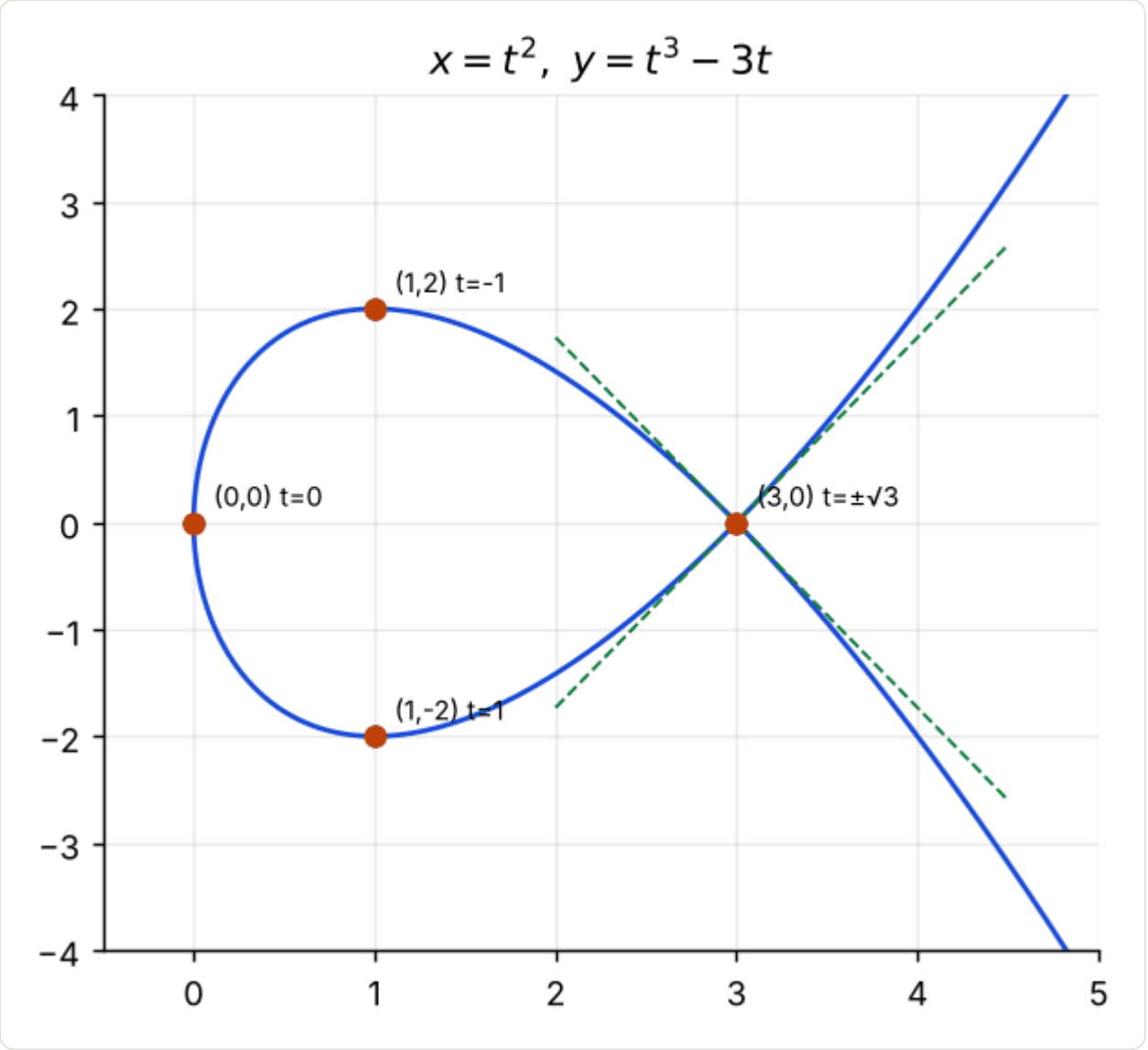
Untuk $t = \sqrt{3}$: kemiringan $= \dfrac{9 - 3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; untuk $t = -\sqrt{3}$: kemiringan $= -\sqrt{3}$. Maka garis singgungnya $y = \sqrt{3}\,(x - 3)$ dan $y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$.

(b) Tangen horizontal/vertikal. Horizontal: $dy/dt = 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$ (di sini $dx/dt = 2t \neq 0$), titik $(1, -2)$ dan $(1, 2)$. Vertikal: $dx/dt = 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ (di sini $dy/dt = -3 \neq 0$), titik $(0, 0)$.

(c) Kecekungan. Pertama $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3t^2 - 3}{2t}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3}{2}t - \dfrac{3}{2t}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2t^2} = \dfrac{3(t^2 + 1)}{2t^2}$.
Dibagi $dx/dt = 2t$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}.$$

Positif (cekung ke atas) untuk $t > 0$; negatif (cekung ke bawah) untuk $t < 0$.



Simpul di $(3, 0)$ dengan dua garis singgungnya (putus-putus), tangen horizontal di $(1, \pm 2)$, tangen vertikal di titik asal.

CONTOH 2 — GARIS SINGGUNG SIKLOID

Sikloid $x = r(\theta - \sin\theta),\ y = r(1 - \cos\theta)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\sin\theta}{r(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

Di $\theta = \pi/3$: $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $1-\cos = \frac{1}{2}$, kemiringan $= \sqrt{3}$. Titiknya $\left(r(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}),\ \frac{r}{2}\right)$, sehingga

$$y - \tfrac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \tfrac{\pi r}{3} + \tfrac{\sqrt{3}\,r}{2}\right) \implies y = \sqrt{3}\,x - \tfrac{\pi r}{\sqrt{3}} + \tfrac{3r}{2} + \tfrac{r}{2},$$

yaitu $\sqrt{3}\,x - y = r\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$.

Tangen horizontal: $\sin\theta = 0$ dan $1-\cos\theta \neq 0$, yaitu $\theta = (2n+1)\pi$ — titik puncak $((2n+1)\pi r,\ 2r)$.

Di $\theta = 2n\pi$ kedua turunan nol (ujung runcing di permukaan tanah). Dengan l'Hôpital,

$$\lim_{\theta\to 2n\pi^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \lim \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = +\infty, \qquad \lim_{\theta\to 2n\pi^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\infty,$$

jadi garis singgungnya vertikal pada titik-titik runcing itu.

2. Luas di bawah kurva parametrik

Luas di bawah $y = F(x)$ (≥ 0) dari $x = a$ sampai $x = b$ adalah $\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$. Bila kurva ditelusuri sekali oleh $x = f(t),\ y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, maka substitusi $x = f(t),\ dx = f'(t)\,dt$ memberi

RUMUS (2)

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)\,f'(t)\,dt \quad (\text{atau } \int_\beta^\alpha \text{ bila } f \text{ menurun}).$$

Batas t diambil dari kondisi: $x = a$ terjadi di salah satu ujung interval, $x = b$ di ujung lainnya. Bila kurva berjalan dari kanan ke kiri, urutan batasnya terbalik, sehingga hasil integral mungkin negatif; luas yang sebenarnya adalah nilai mutlaknya.

CONTOH 3 — LUAS SATU BUSUR SIKLOID

Satu busur: $0 \le \theta \le 2\pi$, $y = r(1-\cos\theta)$, $dx = r(1-\cos\theta)\,d\theta$.

$$A = \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\, r(1-\cos\theta)\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta.$$

Gunakan $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$:

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = r^2 \left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi r^2.$$

Luas ini **tiga kali luas lingkaran pembangkit** (πr^2). Galileo menebaknya; pembuktian pertama diberikan Roberval dan Torricelli.



CONTOH 4 — LUAS ELIPS

Elips $x = a\cos t,\ y = b\sin t$. Separuh atas: $0 \le t \le \pi$, tetapi saat t naik x *menurun* dari a ke $-a$. Jadi luas separuh atas $= \int_{x=-a}^{a} y\,dx = \int_{t=\pi}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = ab\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = ab\cdot\frac{\pi}{2}$. Dua kali itu memberi luas elips $= \pi ab$.

3. Panjang busur

Untuk kurva $y = F(x)$ dengan F' kontinu, $L = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$. Bila kurva ditelusuri sekali oleh $(f(t), g(t))$ dengan $f'(t) > 0$ (sehingga dari kiri ke kanan), maka dengan Rumus (1) dan substitusi

$dx = f'(t)dt$:

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{g'}{f'}\right)^2}\, f'\, dt = \int \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt.$$

TEOREMA (3)

Jika C diberikan oleh $x = f(t),\ y = g(t),\ \alpha \le t \le \beta$, dengan f', g' kontinu dan C ditelusuri **tepat satu kali**, maka

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Mengapa rumus ini masuk akal

Bagi $[\alpha, \beta]$ menjadi n bagian sama panjang, hubungkan titik-titik $P_i = (f(t_i), g(t_i))$ dengan poligon. Panjang tiap sisi $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$. Dengan Teorema Nilai Rata-rata, $\Delta x_i = f'(t_i^*)\Delta t$ dan $\Delta y_i = g'(t_i^{**})\Delta t$ untuk titik-titik t_i^*, t_i^{**} dalam subinterval yang sama. Jadi panjang poligon $= \sum \sqrt{f'(t_i^*)^2 + g'(t_i^{**})^2}\, \Delta t$, yang menyerupai jumlah Riemann dan menuju integral di atas bila $n \to \infty$ (kekontinuan f', g' menjamin t_i^* dan t_i^{**} boleh dianggap sama pada limitnya). Secara simbolik $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\, dt$.

AWAS: TELUSURI SEKALI SAJA

Untuk $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$, integral memberi $\int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$ (benar). Untuk $x = \sin 2t,\ y = \cos 2t$ pada interval yang sama integralnya $\int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$ — dua kali keliling, karena lingkaran dilalui dua kali. Integral selalu mengukur *jarak tempuh* partikel, bukan panjang himpunan titik.

CONTOH 5 — PANJANG SATU BUSUR SIKLOID

$\frac{dx}{d\theta} = r(1-\cos\theta),\ \frac{dy}{d\theta} = r\sin\theta$. Maka

$$\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} = r\sqrt{2-2\cos\theta}.$$

Karena $1-\cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$, kita peroleh $\sqrt{2-2\cos\theta} = \sqrt{4\sin^2(\theta/2)} = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ untuk $0 \le \theta \le 2\pi$. Jadi

$$L = 2r\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{\theta}{2}\,d\theta = 2r\Big[-2\cos\tfrac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = 2r(2+2) = 8r.$$

Panjang satu busur sikloid adalah **delapan kali jari-jari** lingkaran pembangkit (dibuktikan Christopher Wren tahun 1658).

4. Luas permukaan benda putar

Jika kurva $x = f(t),\ y = g(t), \alpha \le t \le \beta$, diputar mengelilingi sumbu x, dengan f', g' kontinu dan $g(t) \ge 0$, maka luas permukaannya

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int 2\pi y\,ds.$$

Jika diputar mengelilingi sumbu y (dengan $x \ge 0$), ganti y dengan x: $S = \int 2\pi x\,ds$. Idenya: setiap potongan busur ds menyapu pita sempit dengan keliling $2\pi y$ dan lebar ds.

CONTOH 6 — LUAS PERMUKAAN BOLA

Bola jari-jari r dihasilkan oleh pemutaran setengah lingkaran $x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ 0 \le t \le \pi$ mengelilingi sumbu x. Karena $ds = r\,dt$,

$$S = \int_0^\pi 2\pi(r\sin t)\,r\,dt = 2\pi r^2\big[-\cos t\big]_0^\pi = 4\pi r^2.$$

5. Ringkasan rumus

Besaran	Rumus parametrik
Kemiringan	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$
Turunan kedua	$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}(dy/dx)}{dx/dt}$
Luas	$\int y\,dx = \int g(t)f'(t)\,dt$
Panjang	$\int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$
Luas permukaan (sumbu x)	$\int 2\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$

Anda dapat memeriksa Contoh 3 dan 5 secara numerik dengan kalkulator Python: pilih "Luas di bawah kurva parametrik" dengan $x(t) = t - \sin(t),\ y(t) = 1 - \cos(t)$, batas 0 sampai $2 * pi$ (hasil $3\pi \approx 9.4248$).