Bab 10 · Persamaan Parametrik dan Koordinat Kutub

10.1 Kurva yang Didefinisikan oleh Persamaan Parametrik

1. Mengapa perlu persamaan parametrik?

Selama ini kurva di bidang kita nyatakan sebagai grafik fungsi $y = f(x)$, atau sebagai himpunan titik yang memenuhi relasi $F(x, y) = 0$. Cara ini punya dua keterbatasan. Pertama, banyak kurva yang gagal uji garis vertikal (misalnya lingkaran), sehingga tidak bisa ditulis sebagai satu fungsi $y = f(x)$. Kedua, persamaan $F(x, y) = 0$ hanya memberi tahu *titik mana saja* yang berada pada kurva, bukan *urutan* dan *arah* titik-titik itu dilalui.

Bayangkan sebuah partikel yang bergerak di bidang. Posisi horizontal dan vertikalnya masing-masing bergantung pada waktu t. Jika kita tuliskan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, kita mendapat deskripsi gerak yang lengkap: di mana partikel berada, kapan ia di sana, dan ke arah mana ia bergerak.

DEFINISI

Misalkan x dan y keduanya diberikan sebagai fungsi dari peubah ketiga t (disebut **parameter**):

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in I.$$

Setiap nilai t menentukan satu titik (x, y). Ketika t berubah, titik itu menggambar sebuah kurva C yang disebut **kurva parametrik**. Pasangan persamaan di atas disebut **persamaan parametrik**.

Parameter tidak harus berarti waktu, dan tidak harus bernama t. Dalam banyak soal geometri parameternya adalah sudut (sering θ). Namun dalam fisika dan teknik, t hampir selalu waktu, sehingga $(f(t), g(t))$ dibaca sebagai posisi partikel pada saat t.

2. Menggambar kurva parametrik dengan menandai titik

Cara paling dasar: buat tabel nilai t, hitung (x, y), tandai titik-titiknya, lalu hubungkan *menurut urutan t yang naik*. Jangan lupa memberi tanda panah arah.

CONTOH 1 — PARABOLA YANG DILALUI DENGAN KECEPATAN BERUBAH

Gambarlah kurva $x = t^2 - 2t,\ y = t + 1$.

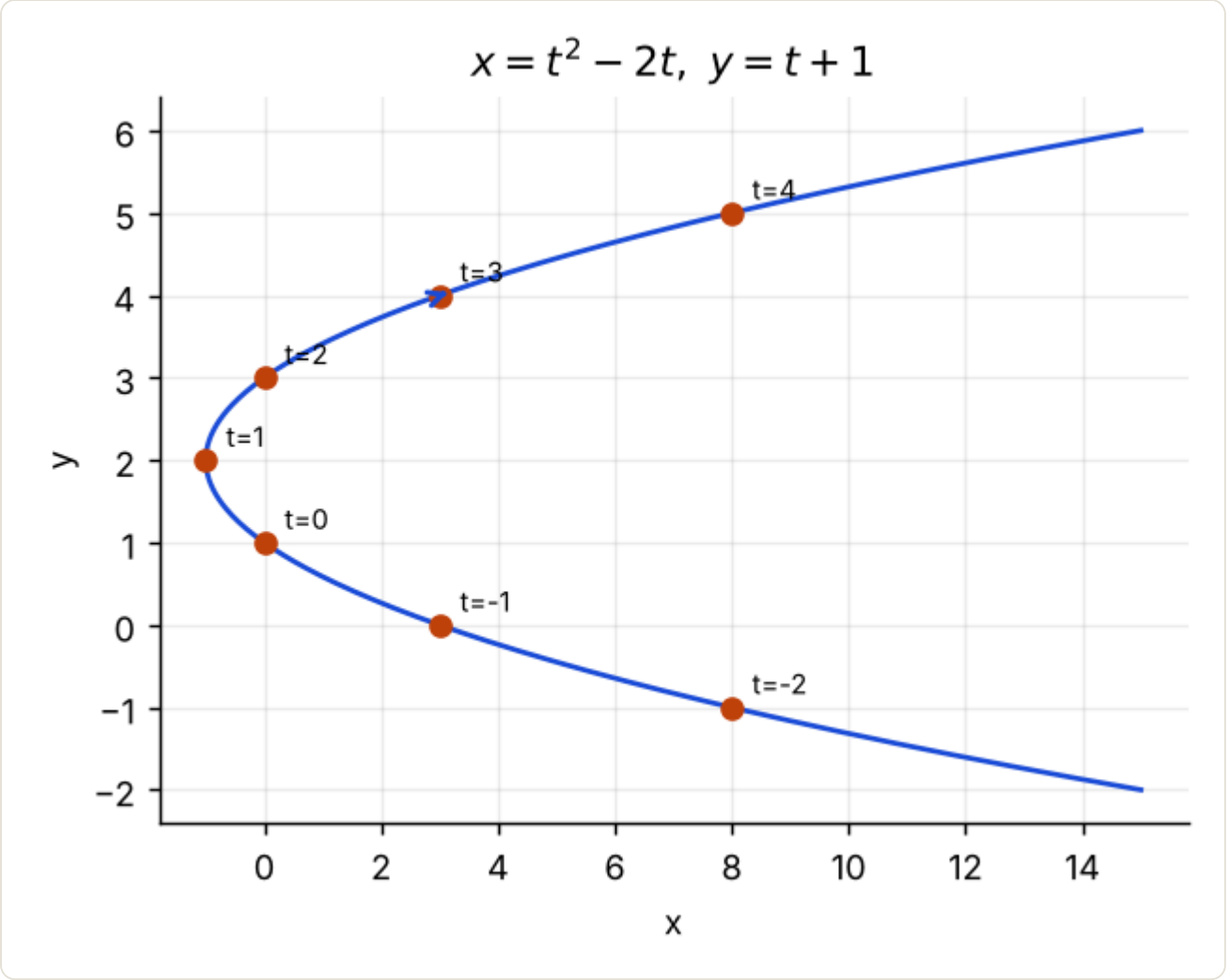
T	−2	−1	0	1	2	3	4
X	8	3	0	−1	0	3	8
Y	−1	0	1	2	3	4	5

Perhatikan bahwa $t = 0$ dan $t = 2$ memberi nilai x yang sama (0), tetapi y berbeda (1 dan 3). Titik-titiknya terlihat membentuk parabola yang terbuka ke kanan. Untuk membuktikannya, **hilangkan parameter**: dari $y = t + 1$ diperoleh $t = y - 1$. Substitusi ke persamaan pertama:

$$x = (y-1)^2 - 2(y-1) = y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 = y^2 - 4y + 3.$$

Jadi kurvanya adalah parabola $x = y^2 - 4y + 3$ dengan sumbu simetri horizontal.

Informasi tambahan yang tidak diberikan persamaan $x = y^2 - 4y + 3$: partikel bergerak ke arah t membesar, yaitu dari kanan-bawah, melewati titik puncak $(-1, 2)$ saat $t = 1$, lalu menuju kanan-atas. Titik-titik bernomor t yang berjarak waktu sama tidak berjarak sama pada kurva, karena partikel melambat mendekati puncak lalu mempercepat lagi.



Titik-titik pada $t = -2, \ldots, 4$ dan arah penelusuran.

Membatasi interval parameter

Bila parameter dibatasi pada interval tertutup $a \le t \le b$, kurva memiliki **titik awal** $(f(a), g(a))$ dan **titik akhir** $(f(b), g(b))$. Contoh: kurva di atas dengan $0 \le t \le 4$ hanya mencakup bagian parabola dari $(0, 1)$ sampai $(8, 5)$.

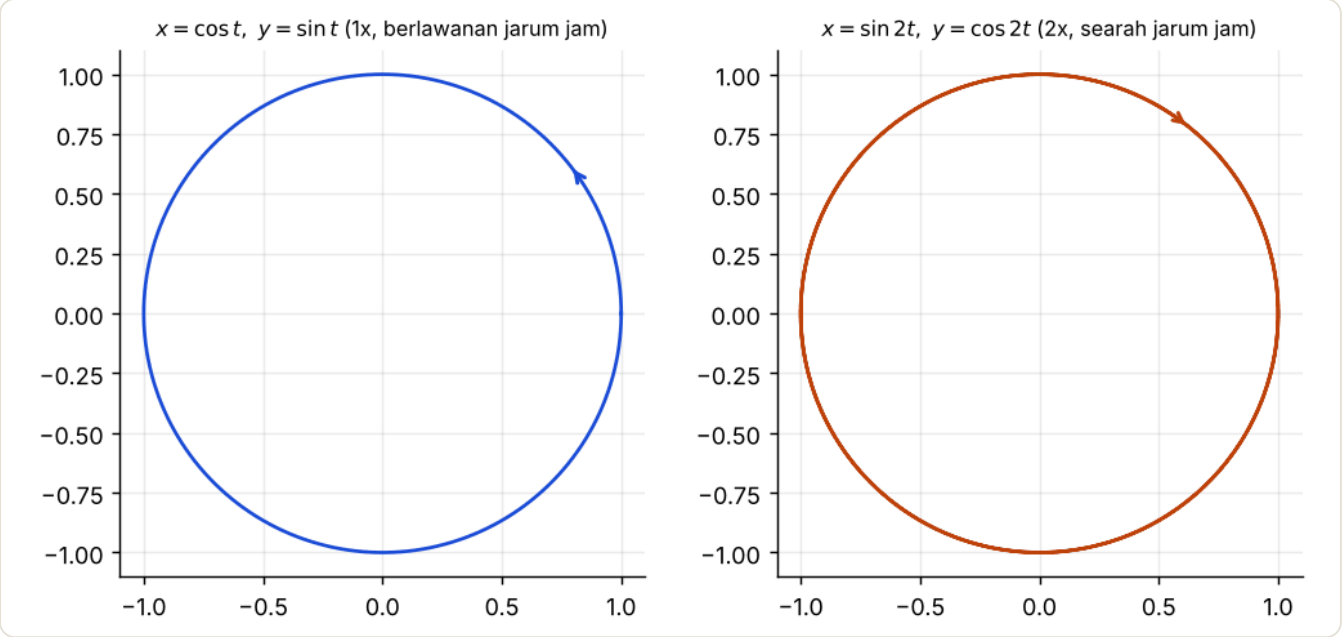
3. Kurva yang sama, parametrisasi berbeda

CONTOH 2 — LINGKARAN SATUAN, SATU KALI PUTARAN

$x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Karena $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, kita peroleh $x^2 + y^2 = 1$, yaitu lingkaran satuan. Di sini t adalah sudut (dalam radian) antara sumbu x positif dan ruas garis dari pusat ke titik. Saat t naik dari 0 ke 2π, titik bergerak *sekali* mengelilingi lingkaran *berlawanan arah jarum jam*, mulai dan berakhir di $(1, 0)$.

CONTOH 3 — LINGKARAN YANG SAMA, DUA KALI PUTARAN DAN ARAH BERLAWANAN

$x = \sin 2t,\ y = \cos 2t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Kembali $x^2 + y^2 = 1$, tetapi sekarang titik awalnya $(0, 1)$, arahnya searah jarum jam (karena x bertambah ketika y masih positif), dan karena argumen sudutnya $2t$, lingkaran dikelilingi *dua kali* selama t menempuh 0 sampai 2π.



Dua parametrisasi untuk himpunan titik yang sama.

CATATAN PENTING

Kurva sebagai *himpunan titik* tidak sama dengan *kurva parametrik*, yaitu himpunan titik beserta cara melaluinya. Contoh 2 dan 3 adalah dua kurva parametrik berbeda dengan himpunan titik yang sama. Perbedaan ini sangat berpengaruh nanti pada panjang kurva (Bagian 10.2): bila lingkaran dilalui dua kali, integral panjang akan memberi dua kali keliling.

CONTOH 4 — LINGKARAN UMUM

Untuk lingkaran berpusat (h, k) berjari-jari r: mula-mula kalikan parametrisasi lingkaran satuan dengan r sehingga diperoleh lingkaran berjari-jari r berpusat di titik asal, kemudian geser h satuan ke kanan dan k satuan ke atas:

$$x = h + r\cos t, \qquad y = k + r\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Elips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ diparametrisasi dengan cara serupa: $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, sebab $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ langsung memberi persamaan elips.

CONTOH 5 — PARAMETRISASI YANG HANYA MENCAKUP SEBAGIAN GRAFIK

$x = \sin t,\ y = \sin^2 t$. Karena $y = x^2$, titik-titiknya berada pada parabola $y = x^2$. Namun $-1 \le \sin t \le 1$, sehingga hanya bagian $-1 \le x \le 1$ yang tercapai. Selain itu $\sin t$ periodik, maka titik bergerak bolak-balik tak hingga kali di antara $(-1, 1)$ dan $(1, 1)$. Pelajaran: setelah menghilangkan parameter, **selalu periksa daerah nilai x dan y** yang benar-benar dicapai oleh parametrisasi.

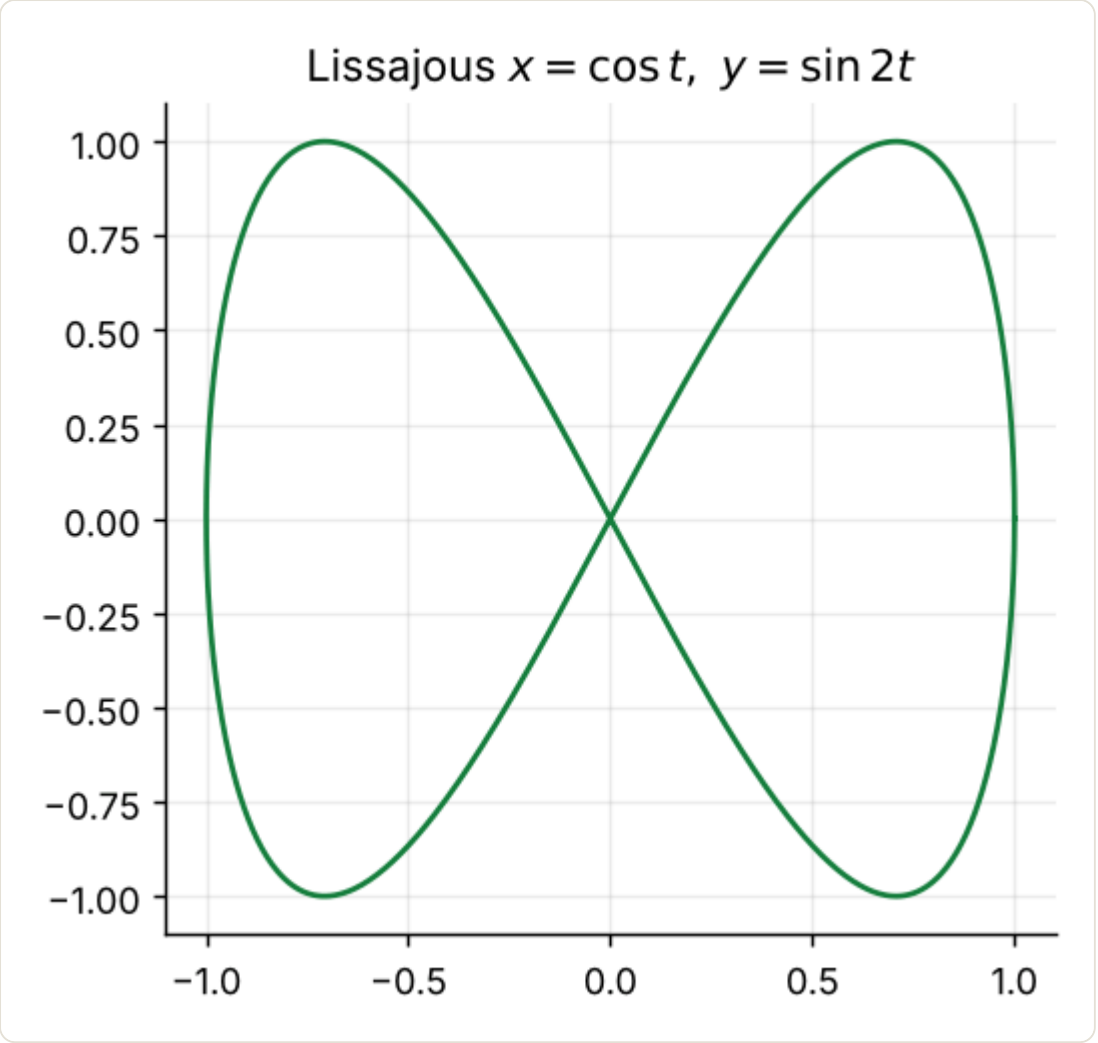
4. Menghilangkan parameter: kiat praktis

- **Persamaan linear dalam t**: selesaikan salah satu persamaan untuk t, substitusikan ke yang lain (hasilnya garis atau parabola, bergantung pangkatnya).
- **Memuat $\cos t, \sin t$**: gunakan $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (lingkaran/elips). Bila memuat $\sec t, \tan t$, gunakan $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ (hiperbola).
- **Memuat e^t**: ingat $e^{2t} = (e^t)^2$ dan $e^{-t} = 1/e^t$; sering menghasilkan kurva rasional seperti $y = 1/x$.
- **Memuat $\cosh t, \sinh t$**: gunakan $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, cabang hiperbola.

Tidak semua parametrisasi bisa dihilangkan parameternya secara bersih. Sikloid (Bagian 5) adalah contohnya: persamaan Cartesiusnya sangat rumit, sedangkan bentuk parametriknya sederhana.

5. Menggambar dengan alat bantu grafik

Kalkulator grafik dan perangkat lunak (termasuk Python/matplotlib yang dipakai untuk gambar di situs ini) menggambar kurva parametrik dengan menghitung banyak titik dan menyambungnya secara berurutan. Parametrik juga memudahkan penggambaran relasi yang sulit diselesaikan untuk y. Misalnya $x = y^4 - 3y^2$: cukup tetapkan $y = t$ lalu $x = t^4 - 3t^2$; kita tidak perlu memecahkan y sebagai empat fungsi terpisah. Secara umum, kurva $x = h(y)$ dapat ditulis $x = h(t),\ y = t$, dan grafik $y = f(x)$ dapat ditulis $x = t,\ y = f(t)$.



Kurva Lissajous $x = \cos t,\ y = \sin 2t$: hasil dua gerak harmonik dengan frekuensi berbeda.

Kurva yang rumit seperti Lissajous $x = a\sin nt,\ y = b\cos t$ praktis mustahil digambar tangan; di sinilah komputer berguna. Kegunaan penting lain: *computer-aided design* (CAD) memakai kurva parametrik khusus, yaitu kurva Bézier, untuk mendefinisikan bentuk bodi mobil dan huruf pada printer laser.

6. Sikloid

DEFINISI

Sikloid adalah lintasan sebuah titik P pada keliling lingkaran yang menggelinding tanpa selip sepanjang garis lurus.

Menurunkan persamaannya

Misalkan lingkaran berjari-jari r menggelinding di sepanjang sumbu x, dan P awalnya di titik asal. Pilih parameter θ = sudut putar lingkaran (dalam radian) setelah menggelinding.

1. Karena tidak selip, panjang busur yang sudah menyentuh garis sama dengan jarak yang ditempuh: titik singgung berada di $x = r\theta$.
2. Maka pusat lingkaran ada di $C = (r\theta,\ r)$.
3. Posisi P relatif terhadap pusat: P telah berputar sebesar θ dari posisi terendahnya, sehingga selisih koordinatnya adalah $(-r\sin\theta,\ -r\cos\theta)$.

Dengan menjumlahkan,

$$\boxed{x = r(\theta - \sin\theta), \qquad y = r(1 - \cos\theta)}$$

Satu busur sikloid dihasilkan oleh satu putaran penuh, yaitu $0 \le \theta \le 2\pi$. Rumus ini juga berlaku untuk θ di luar interval itu (Latihan di buku meminta pembuktian untuk $\pi/2 < \theta < \pi$).



Sikloid dan posisi lingkaran pada $\theta = 2.2$.

Sejarah dan sifat menarik

- **Brakistokron**: dari semua kurva yang menghubungkan titik A ke titik B yang lebih rendah (tidak tepat di bawah A), kurva yang membuat partikel meluncur paling cepat di bawah gravitasi adalah busur sikloid terbalik (soal yang diajukan Johann Bernoulli tahun 1696).
- **Tautokron**: pada sikloid terbalik, waktu meluncur ke dasar tidak bergantung dari titik awal. Huygens memakai ini untuk merancang bandul jam yang periodenya tidak bergantung amplitudo.
- Galileo sudah mempelajarinya dan menyarankan bentuk sikloid untuk lengkung jembatan.

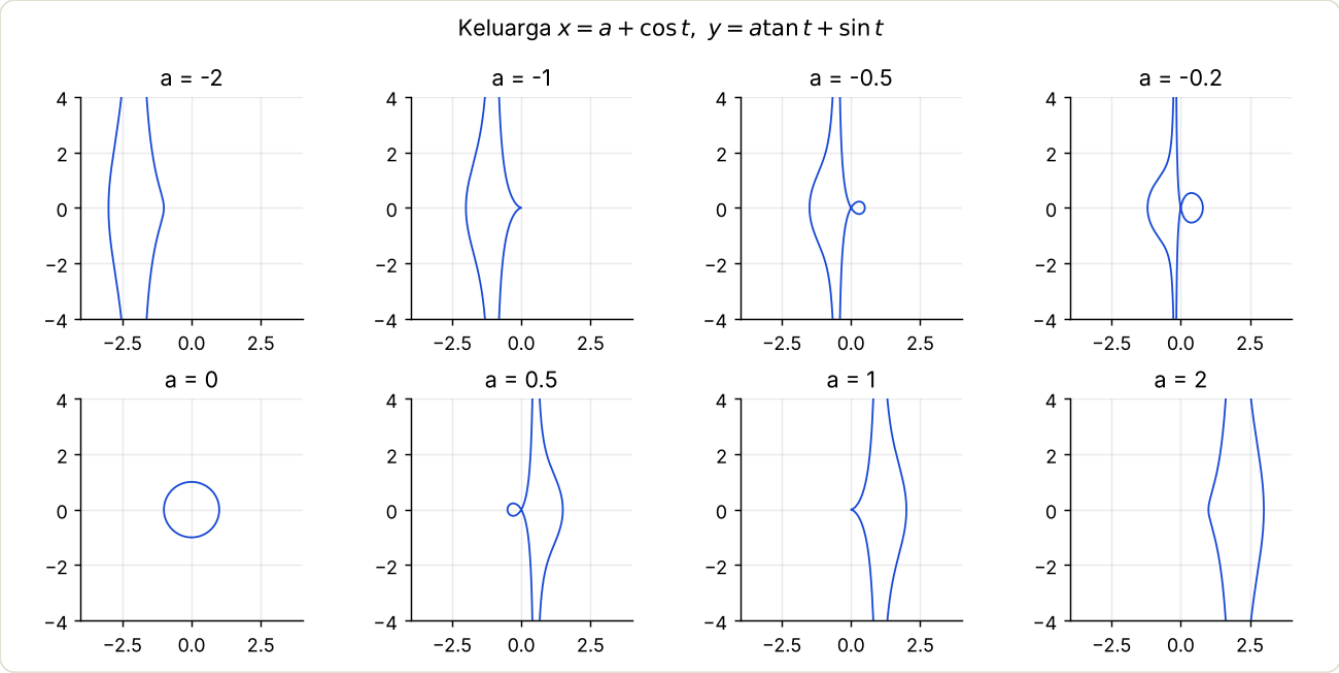
7. Keluarga kurva parametrik

Dengan mengubah konstanta dalam persamaan, kita mendapat *keluarga* kurva. Mengamati bagaimana bentuk berubah terhadap konstanta adalah latihan penting untuk intuisi.

CONTOH 6 — KONKOID NICOMEDES

Keluarga $x = a + \cos t,\ y = a\tan t + \sin t$. Hasil pengamatan dari grafik:

- Semua anggota (kecuali $a = 0$) memiliki dua cabang yang mendekati asimtot vertikal $x = a$.
- Untuk $|a| > 1$ kedua cabang mulus; makin besar $|a|$, makin kurang melengkung.
- Untuk $|a| = 1$, salah satu cabang punya *ujung runcing* (cusp).
- Untuk $0 < |a| < 1$, muncul *simpul* (loop) yang mengecil menjadi cusp saat $|a| \to 1$, dan membesar saat $a \to 0$.
- Untuk $a = 0$ kedua cabang menyatu menjadi lingkaran satuan (Contoh 2).
- Kurva dengan $a > 0$ adalah pencerminan terhadap sumbu y dari kurva dengan $-a$. Buktinya: ganti a dengan $-a$ dan t dengan $\pi - t$; karena $\cos(\pi - t) = -\cos t$, $\tan(\pi - t) = -\tan t$, dan $\sin(\pi - t) = \sin t$, titik (x, y) berubah menjadi $(-x, y)$.



Delapan anggota keluarga konkoid pada jendela $[-4, 4] \times [-4, 4]$.

Nama "konkoid" berasal dari kemiripan cabang luar dengan cangkang kerang (*concha*).

8. Ringkasan teknik

Tujuan	Alat
Parametrisasi lingkaran/elips	$x = h + a\cos t,\ y = k + b\sin t$
Ruas garis dari (x_1, y_1) ke (x_2, y_2)	$x = x_1 + (x_2 - x_1)t,\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t,\ 0 \le t \le 1$
Grafik $y = f(x)$	$x = t,\ y = f(t)$
Sikloid jari-jari r	$x = r(\theta - \sin\theta),\ y = r(1 - \cos\theta)$
Trokoid (titik pada jarak d dari pusat)	$x = r\theta - d\sin\theta,\ y = r - d\cos\theta$

Coba kalkulator Python pada menu atas untuk menghitung panjang dan luas kurva parametrik setelah Anda memahami bagian ini.